Combinatoria

Conteo Elemental

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Introducción

La combinatoria es el área de las matemáticas que se enfoca en contar, es decir, contesta preguntas del estilo ¿cuantos hay en total...? o, ¿de cuantas maneras se puede...? Esto no es siempre tan sencillo como parece. En este entrenamiento veremos algunas técnicas básicas de conteo que, sin embargo, aplicadas adecuadamente nos permiten resolver problemas bastante complejos. La primera de estas técnicas es el principio aditivo:

Principio Aditivo: La idea del principio aditivo es muy sencilla: se trata de separar en casos, contar cada caso manualmente y al final sumar todos los casos.

Ejemplo: En un torneo de básquetbol compiten 16 equipos. En cada ronda los equipos se dividen en grupos de 4. En cada grupo cada equipo juega una vez contra cada uno de los equipos restantes. De cada grupo los dos mejores equipos califican para la siguiente ronda y los dos peores son eliminadios. Después de la última ronda quedan dos equipos que se enfrentan en un partido para determinar al ganador del torneo. ¿Cuántos partidos se jugarán a lo largo de todo el torneo?

Solución: La división en casos que debemos hacer aquí es considerar los partidos que se juegan en cada ronda por separado. Hagámoslo ordenadamente: En la primera ronda los equipos se dividen en 4 grupos. ¿Cuántos partidos se juegan dentro de cada grupo? Como se juega todos contra todos, cada uno de los 4 equipos juega 3 partidos por lo que el total de partidos será $\frac{4\times 3}{2}$. (Dividimos entre dos porque cada partido lo estábamos contando dos veces) Por lo tanto, en la primera ronda se juegan un total de $4 \times 6 = 24$ partidos. Ahora, en la segunda ronda quedan 8 equipos que se dividen en 2 grupos de 4, ya vimos que en cada grupo se juegan 6 encuentros, entonces, en la segunda ronda se jugarán en total $2 \times 6 = 12$ juegos. Ahora nos quedan 4 equipos que forman un solo grupo, es decir, en esta tercera ronda se jugarán solamente 6 partidos. Finalmente nos quedan los dos mejores que jugarán un único partido para determinar el ganador. Entonces, el total de juegos en el torneo será la suma de los totales obtenidos para cada ronda, eto es: $24 + 12 + 6 + 1 = \mathbf{43}$ partidos.

Consideremos ahora una pregunta de este estilo: ¿De cuántas maneras podemos ir de la ciudad A a la ciudad C pasando por la ciudad B si existen tres caminos de A a B y cuatro caminos de B a C?

Observemos que una vez elegido el camino a tomarse de A a B nos quedan cuatro formas para ir de B a C, es decir, para cada una de las tres formas de ir de A a B hay cuatro formas de completar el camino. Por lo tanto el total de formas para realizar el camino completo es $3 \times 4 = \mathbf{12}$.

Nota para el entrenador: Para ilustrar esto de mejor manera es conveniente dibujar un diagrama de árbol

Esto nos lleva a introducir el prinicipio multiplicativo:

Principio multiplicativo: Si queremos realizar una elección compuesta que depende de varias elecciones individuales, el número total de formas para realizar la elección compuesta es la multiplicación de la cantidad de formas de realizar cada elección individual.

Ejemplo: En un salón se tienen cierta cantidad de sillas acomodadas en fila y cierta cantidad de personas. ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar las personas en las sillas si tenemos:

i) 5 sillas y 5 personas.

ii) 5 sillas y 8 personas.

iii) 8 sillas y 5 personas.

Solución:

i) En la primera silla puede sentarse cualquiera de las 5 personas, es decir tenemos cinco opciones. Luego, en la siguiente silla se puede sentar cualquiera menos la persona que ya fue elegida para sentarse en la primera silla, por lo cual tenemos 4 opciones para la segunda silla. De la misma manera, en la tercera silla puede ir cualquiera excepto los dos que se sentaron en las anteriores, es decir tres opciones. Para la cuarta silla tendremos dos opciones y para la primera sólo una (la última persona que quedó sin lugar). Entonces, el total de formas distintas de acomodar a las personas es: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{120}$

   Nota para el entrenador: Es conveniente introducir aquí la notación $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

ii) Siguiendo el mismo proceso que en el caso anterior, en la primera silla puede ir cualquiera de las 8 personas, para la siguiente silla tendremos 7 opciones y así sucesivamente. Por lo tanto, la cantidad de formas es: $8\times7\times6\times5\times4 = \mathbf{6720}$.

iii) En este caso no podemos seguir el mismo proceso ya que algunas de las sillas van a quedar vacías y no sabemos, en principio, cuales serán. Pero lo que podemos hacer es, en lugar de ir asignando personas a las sillas, asignar sillas a las personas. Es decir, observemos que la primer persona puede sentarse en cualquiera de las ocho sillas, la segunda persona puede sentarse en cualquiera menos la que ya fue ocupada, así que tiene siete opciones, la siguiente persona tendrá seis opciones y así sucesivamente, por lo que la respuesta será: $8\times7\times6\times5\times4 = \mathbf{6720}$.

Ahora bien, algunos problemas requieren el uso combinado del principio multiplicativo y el principio aditivo, como lo ilustra nuestro siguiente ejemplo:

Ejemplo María tiene 4 blusas, 3 faldas y 2 pantalones. ¿Cuántas combinaciones distintas puede hacer para vestirse?

Solución: Podemos separar el problema en dos casos distintos: que María use blusa y falda y que María use blusa y pantalón. En el primer caso María tiene 4 opciones para elegir la blusa y 3 para la falda por lo que puede hacer $4 \times 3 = 12$ combinaciones. De la misma manera, en el segundo caso puede hacer $4 \times 2 = 8$ combinaciones. Entonces el total de formas que tiene María para vestirse es $12 + 8 = \mathbf{20}$.

2. Problemas

1. Ruth escoge dos números del 1 al 10 y escribe en su libreta el elemento mayor de la pareja que escogió. Después de elegir todas las parejas posibles de números del 1 al 10 (sin repetir nunca una pareja), Ruth sumó todos los números que escribió. ¿Cuál es la suma que obtuvo?

2. A una fiesta van a asistir 2010 personas. Para servir la cena se van a usar mesas con forma de hexágono regular y en cada lado de ellas se puede sentar a lo más una persona. Se desea que todas las mesas queden juntas y la manera de juntar es pegando cada mesa, por un lado, con una sola de las demás mesas que están pegadas. ¿Cuál es el mínimo número de mesas que se necesitan para sentar a todas las personas?

3. ¿De cuántas maneras se puede pintar un cubo si cada cara debe pintarse de negro o de blanco? (Dos cubos se considera que están pintados de la misma forma cuando girando uno de ellos se puede lograr que se vea idéntico al otro).

4. ¿Cuántos números de cinco cifras no tienen dígitos 0 ni 1?

5. Cuántas banderas bicolores se pueden formar si se dispone de 4 lienzos de tela de colores distintos? Contesta la pregunta en dos casos:

   i) se va a utilizar un asta

   ii) no se va a utilizar asta.

6. Una maestra tiene 5 dulces de distintos sabores y 6 paletas de distintos sabores. ¿De cuántas maneras puede la mestra darle un dilce a cada uno de sus 2 alumnos aplicados y una paleta a cada una de sus 3 alumnas aplicadas?

7. Las cifras $1, 2 \dots 9$ se escriben en el orden habitual en un arreglo de 3×3 (es decir, en el primer renglón están, de izquierda a derecha, 1,2 y 3, en el segundo renglón 4,5 y 6, etcétera) ¿Cuántos números N de siete cifras, todas distintas de cero, tinen la propiedad de que cifras consecutivas en el desarrollo decimal de N son distintas y comparten renglón o columna en el arreglo? (Por ejemplo, $N = 7125474$ tiene la propiedad, pero $N = 3\mathbf{99}8541$ y $N = 56\mathbf{34}782$ no la tienen.)

8. En cierto país hay varios aeropuertos. Una aerolínea ofrece diariamente vuelos directos que conectan cualesquiera dos aeropuertos. Cada día la aerolínea realiza 30 vuelos. ¿Cuántos aeropuertos hay?

9. ¿Cuántos números de seis dígitos tienen al menos un dígito par?

10. Entre las ciudades de San Juan, San Julián y San José hay varios caminos, cada uno de los cuales conecta a exactamente dos ciudades. De San Juan a San Julián podemos ir de 24 formas, pasando por San José. De San José a San Juan hay 18 formas, pasando por San Julián. De San Julián a San José hay 12 formas, pasando por San Juan. ¿Cuántos caminos directos hay entre San Juan y San José?

11. Una diseñadora dispone de 5 tonos de naranja, 7 tonos de verde y 4 tonos de morado, y quiere escoger dos de estos para un logotipo. Ella considera que usar dos tonos del mismo color es aburrido, pero todas las demás combinaciones le agradan. ¿Cuántas opciones tiene?

12. ¿De cuántas maneras diferentes se puede elegir un presidente y un secretario de un grupo de 6 hombres y 8 mujeres si se desea que al menos una de estas personas (ya sea el presidente o el secretario) sea una mujer?

13. Se tienen 7 libros diferentes, de los cuales 2 están encuadernados en verde y los otros 5 en rojo. ¿De cuántas maneras podemos acomodar los siete libros en un estante de manera que los encuadernados en verde ocupen los primeros dos lugares? ¿De cuántas maneras podemos acomodarlos de manera que los libros encuadernados en verde se hallen juntos?

14. ¿Si se escriben todos los múltiplos de 5 menores que 2005, cuántos 1's se usan?

3. Soluciones

1. Notemos que es fácil ver cuántas veces escribió Ruth en su cuaderno cada uno de los números del 1 al 10: No pudo haber escrito el 1 porque al formar una pareja con el uno y cualquier otro número éste otro será el mayor de la pareja y será el que sea escrito en el cuadarno en lugar de el 1. El 2 sólo fue escrito en el cuaderno cuando Ruth tomó la pareja (1,2) ya que si tomamos el 2 con cualquier número que no sea el 1 el 2 no sería el mayor y por lo tanto no lo escribirían en el cuaderno. De la misma manera, el 3 sólo fue escrito en dos ocasiones: cuando se tomó la pareja (1,3) y cuando se tomó la pareja (2,3). Siguiendo este mismo razonamiento, obtenemos que el 4 se escribió 3 veces, el 5 se escribió 4 veces y así sucesivamente hasta llegar al 10 que se escribió 9 veces (una cada vez que tomamos el 10 con cualquiera de los otros 9 números ya que el 10 es mayor que todos). Por lo tanto la suma total de los números en el cuaderno debe ser: $2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 7 + 9 \times 8 + 10 \times 9 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90 = \mathbf{330}$.

2. Veamos que pasa si vamos agregando las mesas una por una. Cuando sólo hay una mesa tenemos 6 lugares disponibles. A partir de ahí, cada vez que agregamos una nueva mesa, agregamos 4 lugares: la nueva mesa tiene cinco lados que podemos usar, pero uno de los lugares que teníamos antes, al que se pega la nueva mesa, ya no lo podemos utilizar. Por lo tanto, si se tienen k mesas, el total de lugares disponibles es $6 + 4(k - 1) = 4k + 2$. Por lo tanto, para llegar a 2010 lugares necesitamos **502** mesas.

3. Primero, dividamos nuestro problema en casos dependiendo de cuántas caras del cubo se colorean de blanco:

   i) Ninguna cara se pinto de blanco: sólo hay una forma de hacer esto.

   ii) Se pinto una cara de blanco: nuevamente, sólo hay una forma de hacerlo ya que sin importar cual cara pintemos basta girar el cubo para obtener cualquier otra coloración.

iii) Se pintan dos caras de blanco: en este caso hay dos formas distintas de pintar, que las caras blancas compartan una arista o que no compartan.

iv) Se pintan tres caras de blanco: partamos de las dos formas distintas obtenidas en el caso anterior. En la primera forma (las dos caras blancas comparten una arista) tenemos dos formas distintas de pintar una nueva cara: que la nueva comparta arista con ambas caras ya pintadas o que comparta con sólo una de ellas. Mientras que en la segunda forma (las dos caras blancas no comparten arista) sólo tenemos una forma de pintar una nueva cara: que la nueva comparta una arista con cada una de las ya pintadas. Sin embargo, esta coloración resulta equivalente a la segunda forma en el caso anterior. Por lo tanto, sólo hay dos formas distintas de pintar tres caras de blanco.

v) Se pintan cuatro caras de blanco: si se pintan cuatro de blanco debemos pintar dos de negro por lo que este caso debe ser análogo al caso iii) con el negro jugando el papel del blanco y viceversa. Por lo tanto, debe haber dos formas distintas.

vi) Se pintan cinco caras de blanco: nuevamente, este caso es análogo al ii), entonces, hay sólo una forma.

vii) Se pintan seis caras de blanco: sólo hay una forma de hacer esto.

Por lo tanto, el total de formas de pintar el cubo es: $1+1+2+2+2+1+1 = \mathbf{10}$.

4. Para formar nuestro número de 5 cifras podemos, en cada una de las cifras, poner cualquier dígito que no sea ni 0 ni 1. Es decir, para cada una de las 5 cifras tenemos 8 opciones, entonces el resultado es: $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = \mathbf{8^5}$.

5. i) Si se utiliza asta simplemente tenemos cuatro opciones para el color que va junto al asta y tres opciones para el color del otro lado (cualquiera de nuestros cuatro lienzos menos el que ya utilizamos). Por lo tanto la respuesta es $4 \times 3 = \mathbf{12}$.

   ii) Como no se va a utilizar asta, una bandera rojo-verde sería indistinguible de una bandera verde-rojo. En otras palabras, cada una de las doce banderas que obtuvimos en el inciso anterior esta siendo contada dos veces, porque cada bandera y su opuesta son ahora indistintas. Entonces la solución en este caso es: $\frac{4\times 3}{2} = \mathbf{6}$.

6. Para darle dulce al primer alumno tiene 5 opciones y para el segundo le quedarán 4 opciones. Luego, para la primera alumna tiene 6 opciones, para la segunda 5 y para la tercera 4. Entonces, el total de formas distintas de realizar la repartición es: $(5 \times 4) \times (6 \times 5 \times 4) = \mathbf{2400}$

7. Para formar nuestro número de 7 cifras podemos empezar eligiendo cualquier dígito del 1 al 9, es decir tenemos nueve opciones para la primer cifra de nuestro número N. Luego, observemos que sin importar que dígito hallamos elegido existen cuatro dígitos (distintos a él) que comparten fila o columna con él en el arreglo. Es decir, tenemos cuatro opciones para la segunda cifra. Además, va a ocurrir lo mismo con las cifras subsecuentes: sin importar que dígito elijamos vamos a tener cuatro opciones para completar el siguiente dígito de manera que el número N siga cumpliendo la propiedad. Por lo tanto, la cantidad de números N que podemos formar es: $9 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = \mathbf{9 \times 4^6}$.

8. Supongamos que hay n aeropuertos en el país. Para saber cuántos vuelos se realizarían basta saber cuántas parejas de aeropuertos se pueden formar pues sabemos que hay un, y sólo un, vuelo que los conecta (hay uno en cada sentido, por lo que la pareja Aeropuerto A-Aeropuerto B es distinta a la pareja Aeropuerto B-Aeropuerto A). Pero para formar estas parejas tenemos n opciones para el aeropuerto de salida y $n-1$ opciones para el aeropuerto de llegada (puede ser cualquiera menos el que se tomó de salida). Como sabemos que hay 30 vuelos diarios obtenemos la ecuación $n \times (n-1) = 30$. Esto es, necesitamos que el producto de dos números consecutivos sea 30. Claramente la única solución es $n = 6$. Por lo tanto, hay **6** aeropuertos en el país.

9. Para resolver este problema, lo importante es darse cuenta que, aunque es difícil contar de manera directa lo que se nos pide, es en cambio muy fácil contar cuántos números cumplen lo opuesto. Es decir, en lugar de contar cuántos números de seis dígitos tienen al menos un dígito par contemos cuántos tienen solamente dígitos impares. El resultado que buscamos será entonces la resta del total de números de seis dígitos menos los que tienen sólo impares. Para formar un número de seis cifras con sólo dígitos impares tenemos 5 opciones para cada una de las 6 cifras, así que debe haber $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$ de estos. Por otro lado, sabemos que hay 900,000 números de seis cifras (son todos los números del 100,000 al 999,999 o, alternativamente, para formar cualquier número de seis cifras simplemente debemos poner un dígito del 1 al 9 en la primera cifra y cualquier dígito del 0 al 9 en las 5 restantes por lo que podemos formar $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900,000$ números diferentes). Entonces el resultado buscado es: $\mathbf{9 \times 10^5 - 5^6}$.

10. Supongamos que hay a caminos directos entre San Juan y San José, b caminos directos entre San José y San Julián, y c caminos directos entre San Julián y San Juan. Entonces para ir de San Juan a San Julián pasando por San José tendríamos $a \times b$ opciones, para ir de San José a San Juan pasando

por San Julián tendríamos $b \times c$ y para ir de San Julián a San José pasando por San Juan tendríamos $c \times a$ opciones. Es decir, tenemos las ecuaciones $a \times b = 24, b \times c = 18, c \times a = 12$. Multiplicando las primera y tercera ecuaciones obtenemos $a^2 \times b \times c = 24 \times 12$, pero sabemos cuanto vale $b \times c$, sustituyéndolo obtenemos: $a^2 \times 18 = 24 \times 12$ o equivalentemente $a^2 = \frac{24 \times 12}{18} = 16$, es decir $a = 4$. Por lo tanto, hay **4** caminos directos entre San Juan y San José.

11. Tenemos tres casos: que utilice morado y naranja, que utilice naranja y verde, y que utilice verde y morado. En el primer caso tiene 4 tonos de morado y 5 de naranja por lo cuál tiene $5 \times 4 = 20$ opciones. De la misma manera, en los otros casos tiene $5 \times 7 = 35$ y $7 \times 4 = 28$ opciones respectivamente. Por lo tanto, el total de opciones es: $20 + 35 + 28 =$ **83**.

12. Tenemos tres casos: que el presidente sea hombre y la secretaria mujer, que el presidente sea mujer y el secretario hombre y que ambas sean mujeres. Para cada caso tenemos $8 \times 6 = 48$, $6 \times 8 = 48$ y $8 \times 7 = 56$ opciones respectivamente. Por lo tanto, el total de formas de hacer la asignación es $48 + 48 + 56 =$ **152**.

13. En el primer lugar del estante debe quedar uno de los libros verdes, es decir, tenemos dos opciones. En el segundo debe quedar el libro verde restante, por lo que, tenemos una sola opción. Luego en el siguiente lugar puede ir cualquiera de los cinco libros rojos, en el siguiente cualquiera de cuatro y así sucesivamente hasta acomodarlos todos. Por lo tanto la cantidad de maneras de acomodarlos en este caso es: $2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$ **240**.
Ahora, observemos que se tienen seis maneras distintas de acomodar los libros verdes juntos, esto es: sin dejar libros rojos a la izquierda de la pareja de libros verdes, dejando un libro rojo a la izquierda, dejando dos libros rojos a la izquierda y así consecutivamente hasta dejar todos los cinco libros rojos a la izquierda de la pareja de verdes. Una vez que nos hemos decidido por uno de estos seis acomodos, la cantidad de formas de colocar los libros es la misma que la que obtuvimos en el primer caso. Por lo tanto, el total de formas en este caso es: $6 \times 240 =$ **1440**

14. Primero consideramos los múltiplos de 5 menores a 1000. Los que tienen dos 1's en su expansión decimal son sólo dos: 110 y 115. Los que tienen un sólo 1, pueden tenerlo en las centenas o en las decenas. En ambos casos, el total de números con estas características es: $1 \times 9 \times 2 = 18$ ya que estamos colocando por fuerza un uno en una de las cifras pero para que el número sea múltiplo de 5 debe terminar en 0 o 5, lo cual nos deja sólo dos opciones para las unidades, y en la cifra restante puede ir cualquier dígito menos el uno. Por lo tanto, hasta antes del 1000 se han utilizado $2 \times 18 + 2 \times 2 = 40$ 1's. Ahora,del 1000 al 2000,

sólo hay dos múltiplos que tengan tres 1's: el 1110 y el 1115. En cuanto a los que tengan dos 1's, uno de ellos por fuerza debe ir en las milésimas y el otro puede estar en las centenas o en las decenas, las unidades deben ser 0 o 5 y la cifra restante puede ser cualquiera menos el 1. Así que tenemos $2 \times 9 \times 2 = 36$ en este caso. Finalmente, los que tienen sólo un uno debe ser el de las milésimas y, por lo tanto, en las centenas y decenas podemos poner cualquier dígito menos unos. Entonces en este caso tenemos: $9 \times 9 \times 2 = 162$ números. Entonces del 1000 al 2000 utilizamos $3 \times 2 + 2 \times 36 + 162 = 240$ 1's, y en total, se utilizaron $40 + 240 = \mathbf{280}$ 1's.