Teoría de Números

Factorización Algebraica

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Introducción

El matemático, físico y astrónomo Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue uno de los más importantes personajes de su tiempo y realizó enormes contribuciones a la ciencia universal. De hecho, si creemos lo que dice la leyenda, comenzó a realizar descubrimientos desde que estaba en la escuela primaria: se dice que el maestro del pequeño Gauss lo castigó obligándolo a sumar todos los números del 1 al 100. Sin embargo, en lugar de realizar la tediosa tarea, Gauss utilizó un truco para rápidamente obtener la respuesta. Observó que si acomodamos los números del 1 al 100 en dos filas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & +\ldots+ & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & +\ldots+ & 2 & + & 1 \end{array}$$

Si realizamos la suma de cada columna obtenemos 101 y hay 100 columnas en el arreglo. Entonces, si sumamos todos los números del arreglo debemos obtener 101×100. Pero por otro lado, en el arreglo tenemos todos los números del 1 al 100 dos veces, es decir, la suma de todos los números del arreglo es el doble de la suma de los números del 1 al 100. Por lo tanto la suma que queríamos calcular es exáctamente $\frac{101\times100}{2} = 5050$.

Utilizando el mismo truco podemos calcular la suma de los primeros n enteros para cualquier n: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n)(n+1)}{2}$. La fórmula anterior es conocida como la fórmula de Gauss y no sólo permite calcular rápidamente una suma muy larga, además, el convertir una suma en multiplicación nos permite utilizar los conocimientos de divisibilidad adquiridos en entrenamientos previos.

Ejemplo: ¿Para cuántas parejas de dígitos a y b la suma de los números de dos cifras $ab + ba$ es un cuadrado perfecto?

Solución: Observemos que podemos reescribir el número ab como $10 \times a + b$ y el ba como $10 \times b + a$. Luego, tenemos $ab + ab = 10 \times a + b + 10 \times b + a = 11 \times (a + b)$.

Ahora para que este producto sea un cuadrado perfecto, evidentemente $a + b$ debe ser múltiplo de 11. Sin embargo, no puede ser 22 (o ninguno mayor) puesto que, al ser dígitos, a y b suman, a lo mucho, 18. Por lo tanto, debemos tener $a + b = 11$ y hay 4 parejas que hacen esto (2 y 9, 3 y 8, 4 y 7 y 5 y 6).

El anterior ejemplo ilustra una importante secuencia para resolver problemas: primero, pasamos la información del problema a una expresión algebraica y luego factorizamos dicha expresión algebraica para poder encontrar las incógnitas.

Para poder realizar este esquema, recordemos algunas otras maneras de pasar sumas y restas a multiplicaciones:

Factorizaciones algebraicas: Una de las más importantes es la diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

También tenemos la diferencia de cubos: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

En el caso de cubos podemos también factorizar la suma:
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

De hecho, la anterior factorización se puede generalizar para cualquier n impar: $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$.

Por otro lado tenemos las sumas de cuadrado perfecto $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ y
$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

Tenemos también las de cubo perfecto $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$
y $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$.

Por supuesto, existen fórmulas similares para las potencias cuartas, potencias quintas etc. Sin embargo, estas no aparecen frecuentemente.

Otra fórmula interesante es la diferencia de potencias iguales:
$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

La diferencia de cuadrados y de cubos es un caso particular de esta última. Otro caso particular que suele aparecer es el siguiente: $1 + x + x^2 + \ldots x^r = \frac{x^{r+1}-1}{x-1}$.

Nota para el entrenador: Es conveniente desarrollar algunas (o todas) de las factorizaciones anteriores para verificarlas y para que los alumnos las vayan memorizando. Además, si se quiere que los alumnos practiquen su álgebra, puede ser buena idea que ellos mismos pasen al pizarrón a desarrollarlas.

Aunque esta es una lista bastante completa de las factorizaciones necesarias para la olimpiada de matemáticas no simepre vamos a poder llevar la información de un problema a exactamente una de estas formas; muchas veces tendremos que ajustar sumando una constante o factorizar varias veces.

Ejemplo: Demuestra que para cualquier entero impar n se tiene que $8 \mid n^2 - 1$.

Solución: Lo que debemos ver es que, sin importar que valor impar tome n, el 2 aparece al menos a potencia 3 en la factorización en primos de $n^2 - 1$. Para esto, observemos que $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Luego, como n es impar, tanto $n-1$ como $n+1$ son pares así que ya tenemos $4 \mid (n-1)(n+1)$. Pero además, como son dos números pares consecutivos debemos tener que 4 divide a alguno de los dos. Por lo tanto, como 4 divide a uno de ellos y 2 divide al otro concluímos que $8 \mid (n-1)(n+1)$ que es lo que queríamos demostrar.

Otro uso de las factorizaciones es que nos permiten igualar la multiplicación de dos expresiones algebraicas a un entero. Pero si dicho entero lo factorizamos en primos podemos saber cuales son todos sus divisores y, consecuentemente, todas las formas de obtener el entero como producto de dos cosas. Luego podemos igualar nuestras expresiones algebraicas a los posibles factores y así despejar las incógnitas.

Ejemplo: Encuentra todos los enteros positivos a tales que $a^3 + a - 68 = 0$.

Solución: Reescribimos la ecuación anterior como $a^3 + a = 68$. Luego factorizamos para obtener $a(a^2+1) = 68$. Por otro lado, la factorización en primos de 68 es $68 = 2^2 \times 17$. Por lo tanto, los divisores de 68 son 1, 2, 4, 17, 34 y 68. Entonces, las únicas formas de obtener 68 como el producto de dos enteros positivos son $1 \times 68, 2 \times 34$ y 4×17. Además observemos que a^2+1 es más grande que a así que nos quedan únicamente tres posibilidades: $a = 1$ y $a^2 + 1 = 68$; $a = 2$ y $a^2 + 1 = 34$; $a = 4$ y $a^2 + 1 = 17$. Claramente el único caso en que se cumplen ambas igualdades es el tercero, así que concluímos que el único entero que cumple la ecuación es $a = 4$.

2. Problemas

1. Una sucesión aritmética es una serie de números que estan a una misma distancia d. Es decir si el primer término es x y el segundo $x + d$ el tercero debe ser $x + 2d$, el cuarto $x + 3d$ y así sucesivamente. Por ejemplo 8, 12, 16, 20, 24 es una sucesión aritmética de cinco términos con $x = 8$ y $d = 4$. Igualmente, 1.3, 1.7, 2.1, 2.5, 2.6, 3 es una sucesión aritmética de seis términos con $x = 1{,}3$ y $d = 0{,}4$. Mientras que, 5, 2, -1, -4 es una serie aritmética de cuatro términos con $x = 5$ y $d = -3$.

   a) Usa el truco de Gauss para encontrar una fórmula para la suma de una sucesión aritmética de n términos con término incial x y distancia d.

   b) Utiliza el resultado obtenido en a) para demostrar que si sumamos los impares del 1 al $2k+1$ el resultado es un cuadrado perfecto para cualquier k.

2. Sabemos que los lados de un triángulo rectángulo miden una cantidad entera de cm y que uno de los catetos mide 17 cm. Encuentra las medidas de los otros lados.

3. ¿Cuál es la suma de los factores primos de $2^{16}-1$?

4. ¿Para qué números reales a sucede que $a(a+1) < \frac{-1}{4}$?

   Nota para el entrenador: Conviene aquí explicar brevemente qué es un número real.

5. ¿Para qué enteros n es $2^8+2^{11}+2^n$ un cuadrado perfecto?

6. Encuentra todos los enteros positivos a y b que cumplen que $(a,b)+[a,b]=ab$

7. Demuestra que el número $\underbrace{11\ldots1}_{2r}-\underbrace{22\ldots2}_{r}$ es un cuadrado perfecto para cualquier entero positivo r

8. Encuentra todas los enteros positivos m y n que satifacen la ecuación $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$.

9. Encuentra todos los primos p tales que $9p+1$ es un cubo perfecto.

10. Si n es un entero positivo tal que $3n+1$ es cuadrado perfecto, demuestra que $n+1$ puede expresarse como la suma de tres cuadrados perfectos.

3. Soluciones

1. a) La sucesión aritmética es $x, x+d, x+2d, \ldots, x+(n-1)d$. Acomodemos los términos en un arreglo de dos filas:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & x+d & +\ldots+ & x+(n-2)d & + & x+(n-1)d \\ x+(n-1)d & + & x+(n-2)d & +\ldots+ & x+d & + & x \end{array}$$

   Ahora, la suma de cada columna es $2x+(n-1)d$ y hay n columnas. Por lo tanto, la suma de todo el arreglo es $(n)(2x+(n-1)d)$ y la suma que queremos calcular es $\frac{(n)(2x+(n-1)d)}{2}$.

   b) $1, 3, 5, \ldots, (2k+1)$ es una sucesión aritmética con $k+1$ términos, $x=1$ y $d=2$. Aplicando la fórmula anterior, la suma $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)$ es $\frac{(k+1)(2+(k)(2))}{2}=(k+1)^2$. Es decir, es un cuadrado perfecto como queríamos demostrar.

2. Sea x la medida del otro cateto y sea y la medida de la hipotenusa. Por teorema de Pitágoras debemos tener $x^2+17^2=y^2$. Esto lo podemos rescribir como $17^2=y^2-x^2=(y+x)(y-x)$. Pero 17 es un número primo así que las únicas formas en que podemos obtener 17^2 como producto de dos factores es 1×289 y 17×17. Pero observemos que en el segundo caso tendríamos $y+x=17$ y

$y-x=17$ lo cual sólo seria posible si $x=0$ pero en ese caso no tendríamos un triángulo (no podemos tener un lado de 0 cm). Así que sólo nos queda el caso $y-x=1$ y $y+x=289$ (el caso $y-x=289$ y $y+x=1$ es imposible porque x y y son positivos). Despejando el sistema de ecuaciones anterior nos queda $y=145$, $x=144$ y estas deben ser las medidas de los otros lados.

3. El número $2^{16}-1$ es muy grande, tratar de calcularlo y factorizarlo en primos directamente sería demasiado trabajoso. En lugar de eso factoricémoslo primero como si fuera una expresión algebraica para reducirlo a factores más pequeños: $2^{16}-1=(2^8)^2-1=(2^8-1)(2^8+1)$. De la misma manera, $2^8-1=(2^4-1)(2^4+1)$. Luego, $2^4-1=(2^2-1)(2^2+1)$. Por lo tanto, $2^{16}-1=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$. Estos factores ya son más pequeños y los podemos calcular: $2^8+1=257, 2^4+1=17, 2^2+1=5$ y $2^2-1=3$. Podemos verificar que de hecho todos son primos, así que ya hemos factorizado en primos el número original. Finalmente sumamos para obtener la repuesta $257+17+5+3=282$.

4. La desigualdad puede escribirse como $a^2+a<\frac{-1}{4}$ o equivalentemente $a^2+a+\frac{1}{4}<0$. Luego, si queremos que un número sea menor que cero, el número multiplicado por 4 debe también ser menor que cero. Entonces la desigualdad anterior es equivalente a $4a^2+4a+1<0$ pero factorizando la expresión de la izquierda nos queda $(2a+1)^2<0$ y como ningún número elevado al cuadrado puede ser estrictamente menor que cero, la desigualdad anterior nunca puede satisfacerse. Pero como era equivalente a la original concluímos que no hay ningún real a que cumpla lo deseado.

   Nota para el entrenador: Es probable que los alumnos no tengan experiencia trabajando con desigualdades. Hay que explicar detelladamente la solución anterior para que la entiendan bien.

5. Supongamos que $2^8+2^{11}+2^n$ es un cuadrado k^2. Tenemos la ecuación $2^8+2^{11}+2^n=k^2$. Observemos que $2^8+2^{11}=2^8(2^3+1)=2^8(9)$. Por lo tanto la ecuación anterior es equivalente a $2^n=k^2-2^8(9)$. Pero la expresión de la derecha es una diferencia de cuadrados, factorizándola nos queda $2^n=(k+2^4(3))(k-2^4(3))=(k+48)(k-48)$. Ahora bien, lo que tenemos es un producto de dos factores que debe resultar una potencia de dos. Es claro que entonces cada uno de los factores debe ser una potencia de dos. Pero además sabemos a que distancia están estos dos factores pues vemos que $(k+48)-(k-48)=96$. Por lo tanto, lo único que debemos hacer es encontrar dos potencias de dos que esten a distancia 96. Para ello escribimos una lista parcial de potencias de dos: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256. Analizando la lista vemos que la única pareja que cumple es 128-32=96, así que estas son las potencias que buscamos. Además ya no es necesario tomar

en cuenta potencias más grandes ya que las distancias entre ellas serán mucho mayores a 96. Finalmente, nos quedó $2^n = (128)(32) = (2^7)(2^5)$. Por lo tanto, $n = 12$.

6. Sea $d = (a, b)$ y sea $m = [a, b]$. En el entrenamiento de factorización en primos vimos que $(a, b) \times [a, b] = a \times b$. Por lo tanto, la ecuación $(a, b) + [a, b] = ab$ puede reesrcibirse como $d + m = dm$ o equivalentemente $0 = dm - d - m$. Observemos que la expresión de la derecha no la podemos factorizar. Sin embargo si sumamos un uno a ambos lados nos queda: $1 = dm - d - m + 1$ y ahora sí podemos factorizar la expresión de la derecha: $1 = (d-1)(m-1)$. Luego, la única forma de expresar a 1 como producto de dos cosas es $1 = 1 \times 1$. Por lo tanto, la única solución es $d - 1 = 1$ y $m - 1 = 1$ y esto nos da $d = 1$ y $m = 1$. Ahora bien, ¿qué enteros tienen a 2 como m.c.d y como m.c.m.? Es evidente que la única solución es $a = b = 2$

   Nota para el entrenador: A los alumnos les puede parecer muy artificial el paso en que sumamos 1 a ambos lados de la ecuación. Hay que mostrarles que la forma de hacerlo es alrevés: lo que se hace es poner al tanteo un producto que nos de los términos algebraicos (en este caso no es difícil ver que debe ser $(d-1)(m-1)$ **y luego si sobra una constante (en este caso el 1) la sumamos a ambos lados.**

7. Notemos que el número $\underbrace{11\ldots1}_{2r}$ lo podemos expresar como $10^{2r-1} + 10^{2r-2} + \ldots + 10 + 1$ y de la misma manera $\underbrace{22\ldots2}_{r}$ lo podemos expresar como $2 \times 10^{r-1} + 2 \times 10^{r-2} + \ldots + 2 \times 10 + 2$. Por lo tanto, $\underbrace{11\ldots1}_{2r} - \underbrace{22\ldots2}_{r} = 10^{2r-1} + 10^{2r-1} + \ldots 10^r - 10^{r-1} - 10^{r-2} - \ldots - 10 - 1 = 10^r(10^{r-1} + 10^{r-2} \ldots 10 + 1) - (10^{r-1} + 10^{r-2} + \ldots + 10 + 1) = (10^r - 1)(10^{r-1} + 10^{r-2} + \ldots + 10 + 1) = (10^r - 1)\frac{10^r-1}{10-1} = \frac{(10^r-1)(10^r-1)}{9} = (\frac{10^r-1}{3})^2$. El cual es un cuadrado perfecto como queríamos demostrar.

8. Vemos que la ecuación $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{3}$. A su vez, esto pasa si y sólo si $3(m+n) = mn$ o equivalentemente si $0 = mn - 3m - 3n$. Ahora, sumando un nueve a ambos lados de la igualdad nos queda $9 = mn - 3m - 3n + 9$ y el lado derecho lo podemos factorizar: $9 = (m-3)(n-3)$. Luego, como 9 se factoriza en primos como $9 = 3^2$, las únicas formas de obtenerlo como producto de dos factores son $9 = 1 \times 9$ y $9 = 3 \times 3$. Por lo tanto, tenemos tres opciones: $m - 3 = 1, n - 3 = 9; m - 3 = 3, n - 3 = 3; m - 3 = 9, n - 3 = 1$ y despejando las incógnitas nos quedan las soluciones $m = 4, n = 12; m = 6, n = 6; m = 12, n = 4$.

9. Supongamos que $9p+1$ es un cubo perfecto x^3, esto es $9p+1 = x^3$ o equivalentemente $9p = x^3 - 1$. Ahora bien, el lado derecho de la igualdad anterior se puede factorizar como $(x-1)(x^2+x+1)$ Pero por otro lado, como p es primo, las únicas formas de obtener a $9p$ como producto de dos factores son $9p = 1 \times 9p$; $9p = 3 \times 3p$; $9p = 9 \times p$. Por lo tanto nos quedan seis posibles casos que checar:

   i) $(x-1) = 1$ y $(x^2+x+1) = 9p$
   $x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2+x+1 = 7$ que no es de la forma $9p$, así que este caso no funciona.

   ii) $(x-1) = 3$ y $(x^2+x+1) = 3p$
   $x-1 = 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x^2+x+1 = 21$ que es en efecto $3p$ con $p = 7$.

   iii) $(x-1) = 9$ y $(x^2+x+1) = p$
   $x-1 = 9 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow x^2+x+1 = 111$ que no es primo, así que este caso no funciona.

   iv) $(x-1) = p$ y $(x^2+x+1) = 9$
   $x^2+x+1 = 9 \Rightarrow x^2+x-8 = 0$. Al resolver la ecuación cuadrática anterior vemos que no hay soluciones enteras, así que este caso no funciona.

   v) $(x-1) = 3p$ y $(x^2+x+1) = 3$
   $x^2+x+1 = 3 \Rightarrow x^2+x-2 = 0$. Al resolver la ecuación cuadrática anterior vemos que no hay soluciones enteras, así que este caso no funciona.

   vi) $(x-1) = 9p$ y $(x^2+x+1) = 1$
   $x^2+x+1 = 1 \Rightarrow x^2+x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = -1 \Rightarrow x-1 = -1$ o $x-1 = -2$ los cuales no son de la forma $9p$, así que este caso tampoco funciona.

   Por lo tanto, el único caso que funcionó nos dió $p = 7$.

10. Como $3n+1$ es un cuadrado perfecto x^2 tenemos $3n+1 = x^2 \Rightarrow 3n = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Como 3 divide al lado izquierdo de la ecuación debe también dividir al lado derecho. Esto es, $x-1$ debe ser múltiplo de 3 o bien $x+1$ debe ser múltiplo de 3. Veamos ambos casos por separado:

    a) Supongamos que $x-1$ es múltiplo de 3. Esto es lo mismo que decir que existe un entero k tal que $x-1 = 3k$ o equivalentemente $x = 3k+1$. Por otro lado, a partir de la ecuación original podemos obtener a n en términos de x como $n = \frac{x^2-1}{3}$. Sustituyendo en esta ecuación el valor de x nos queda: $n = \frac{(3k+1)^2-1}{3} = \frac{9k^2+6k+1-1}{3} = 3k^2+2k$. Por lo tanto, $n+1 = 3k^2+2k+1$ pero es fácil ver que $3k^2+2k+1 = (k+1)^2+k^2+k^2$ la cual es una suma de tres cuadrados perfectos como queríamos.

b) Ahora tenemos $3 \mid x+1$ o, equivalentemente, existe un entero k tal que $x = 3k-1$. Nuevamente sustituyendo esto en la ecuación para n nos queda $n = \frac{(3k-1)^2-1}{3} = \frac{9k^2+6k+1-1}{3} = 3k^2-2k$. Entonces tenemos $n+1 = 3k^2-2k+1$ y vemos que $3k^2-2k+1 = k^2+k^2+(k-1)^2$. Es decir, también en este caso $n+1$ puede obtenerse como la suma de tres cuadrados perfectos.