31 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

EXAMEN ESTATAL. SOLUCIONES

Problema 1. Carlos tiene seis manzanas y seis peras, ¿de cuántas maneras puede poner 6 frutas en una fila, de manera que entre dos manzanas no haya ninguna pera?

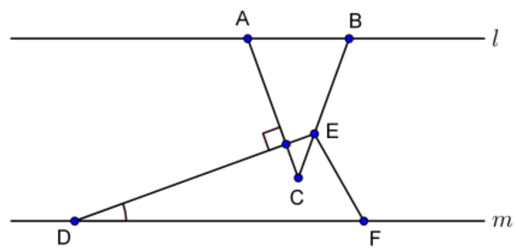
Solución 1. Denotemos por M a una manzana y por P a una pera. Contaremos de acuerdo al número de manzanas en la fila. Primero notemos que la cantidad de manzanas puede ir desde 6 hasta 0, además, como no puede haber una pera entre dos manzanas, la única forma de colocar las peras es a los extremos de las filas y tendremos una manera por cada forma de sumar la cantidad de peras con dos dígitos entre 0 y 6.

- **6 manzanas.** Solo tenemos la opción $MMMMMM$.
- **5 manzanas.** Las opciones son $MMMMMP$ y $PMMMMM$.
- **4 manzanas.** Las opciones son $MMMMPP$, $PMMMMP$ y $PPMMMM$.
- **3 manzanas.** Las opciones son $MMMPPP$, $PMMMPP$, $PPMMMP$ y $PPPMMM$.
- **2 manzanas.** Las opciones son $MMPPPP$, $PMMPPP$, $PPMMPP$, $PPPMMP$ y $PPPPMM$.
- **1 manzanas.** Las opciones son $MPPPPP$, $PMPPPP$, $PPMPPP$, $PPPMPP$, $PPPPMP$ y $PPPPPM$.
- **0 manzanas.** Solo tenemos la opción $PPPPPP$.

Por lo tanto en total son $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 1 = 22$ filas distintas.

Problema 2. En un tablero de 75x75 las filas y columnas se numeran del 1 al 75 y cada casilla es identificada con dos coordenadas, una correspondiente a la fila y otra a la columna, como se muestra en la figura. Claudia quiere poner una ficha en todas las casillas que tienen una coordenada par y la otra múltiplo de 3 (y solo en esas). ¿Cuántas fichas quedarán en el tablero?

Solución 2. En el tablero tendrán ficha la casillas de la forma (x, y) en las que x sea múltiplo de 2 y y múltiplo de 3 o viceversa. En el caso de que x sea par tenemos $\left[\frac{75}{2}\right]$ de opciones para x, donde $\left[\frac{a}{b}\right]$ significa la parte entera de la división de a por b. Para y tenemos $\left[\frac{75}{3}\right]$ opciones. Por lo tanto, en este caso tendremos $37 \cdot 25 = 925$ fichas colocadas. Notemos que el siguiente caso es equivalente, pues resulta de girar $90°$ cada tablero ya contado, pero si duplicamos este valor estaremos contando doble casos como la casilla $(6, 6)$, es decir, en las que ambos números son múltiplos de 6. El número de fichas en este caso es $\left[\frac{75}{6}\right] \cdot \left[\frac{75}{6}\right] = 12 \cdot 12 = 144$. Por lo tanto, el total de opciones es $925 + 925 - 144 = 1706$.



Problema 3. En la figura las rectas l y m son paralelas. Si además se sabe que el ángulo $\angle DEB = 130°$, $AC = BC$ y los segmentos DE y AC son perpendiculares, ¿cuánto mide el ángulo $\angle FDE$?

Solución 3. Sea O la intersección de AC con ED. Prolonguemos ED hasta que corte en P a l. Como $\angle DEB = 130$, entonces $\angle OEC = 50$. Por la suma de los ángulos del triángulo OEC, $\angle OCE = 40$. Como el triángulo ABC es isósceles, entonces $\angle CAB = 70 = \angle ABC$. Por la suma de los ángulos del triángulo AOP tenemos que $\angle APO = 20$. Como l y m son paralelas, entonces $\angle PDF = 20$.

Solución Alternativa. Sea O la intersección de AC con ED. Por la suma de los ángulos del cuadrilátero $AOEB$ y el hecho de que los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ deben ser iguales, obtenemos que cada uno de ellos debe ser igual a 70. Tracemos una perpendicular a m que pase por D y esta cortará a l en P. Al ser suplementario del $\angle BAC$, tenemos que $\angle PAO = 110$. Por la suma de los ángulos del cuadrilátero $DPAO$ obtenemos que $\angle PDO = 70$. Como $\angle PDF = 90$ y $\angle PDO = 70$, entonces $\angle EDF = 20$.

Problema 4. Un número *emparejado* es aquel que solamente utiliza dos dígitos distintos, por ejemplo el 1188188 o 595. Encuetra el número *emparejado* más pequeño que sea múltiplo de 28, que la suma de sus cifras sea igual a la multiplicación de sus cifras y que además dicha multiplicación sea el cuadrado de un cuadrado.

Solución 4. Como la suma de dígitos es igual al producto de dígitos. Uno de dichos dígitos debe ser el 1. No puede ser cero porque el producto sería 0 y todos los números deberían cero para que se cumpla la condición de la suma. Estudiemos cuál es el otro posible dígito y cuantas veces necesita aparecer para poder ser el producto el cuadrado de un cuadrado.

De ser 2: Cómo el producto es cuadrado de cuadrado necesitamos al menos cuatro 2's y el producto es al menos 16 y por tanto necesitamos al menos ocho 1's. Aquí tenemos un número de 12 cifras.

De ser 4: Necesitamos al menos dos 4s y entonces al menos 8 1s. Tenemos un número de 10 cifras.

El cuadrado de un cuadrado más chico después de 16 es 81. Y para este se necesitan muchos más 1s y por tanto más cifras. Entonces si encontramos soluciones en alguno de los dos casos podremos compararlo y concluir. Tenemos que asegurar la divisibilidad por $28 = 4 \cdot 7$.

Caso de 1 y 4:

Para asegurar la divisibilidad del 4 tiene que acabar en 44, por lo que el número debería ser 1111111144, pero este número no es múltiplo de 7.

Caso de 1 y 2:

Para asegurar la divisibilidad del 4 tiene que acabar en 12. La primera posibilidad es 111111122212, pero este número no es múltiplo de 7. La segunda posibilidad es 111111212212 y este número sí es múltiplo de 7, por lo tanto es el más pequeño que cumple.