La integración de instrumentos informáticos en la enseñanza: un acercamiento por las técnicas

JEAN-BAPTISTE LAGRANGE

Traducción: José Muñoz Delgado

Contenido

RESUMEN. El uso indiscriminado de dispositivos gráficos y simbólicos en una computadora o calculadora en la enseñanza del álgebra y el análisis será muy pronto una realidad. Esta situación conduce a reexaminar dos temas muy presentes en los discursos y experimentos sobre la introducción de esos instrumentos: la antigua tensión entre "las habilidades manipulativas" y "la comprensión de conceptos" y la reciente influencia de una corriente de "matemáticas experimentales" en investigación en matemáticas. Este artículo pretende mostrar que estos dos temas ocultan una realidad esencial, aquélla de la existencia de una dimensión técnica en la actividad matemática y de su papel irremplazable como nivel intermedio entre las tareas y las teorizaciones. Apoyándose en la investigación relativa a la aplicación de software o calculadoras "con cálculo formal", el artículo se propone considerar la "nuevas técnicas" asociadas a las herramientas tecnológicas, su papel en la conceptualización y su articulación con las "técnicas habituales". Para la enseñanza, la introducción de estos instrumentos exige un trabajo de diseño de praxeologías adaptadas a, así como una acción cotidiana sobre, las técnicas de instrumentadas.

ABSTRACT. The use of graphical and symbolic facilities in the teaching and learning of algebra and calculus will soon be a reality. Authors who write about the introduction of these instruments often claim that new technology is able to redress the imbalance between skill-dominated conceptions of school mathematics in favour of understanding. More recently some have stressed that 'experimental mathematics' traditionally the reserve of mathematical research may be incorporated into the teaching and learning of mathematics. This paper looks into these two ideas and shows that they conceal an essential dimension: techniques play an important role in mathematical activity, intermediate between tasks and theories. This paper draws on research studies on the introduction of symbolic systems on computers and calculators and considers 'new' techniques that accompany new technological instruments, their role in conceptualising and their links with 'usual' paper/pencil techniques, as a key to analyse the role of technology in education. This view implies non obvious tasks for the teacher in the introduction of technology: the design of praxeologies adapted to new instrumental settings and everyday action on students' techniques.

1. Introducción

La banalización de las calculadoras gráficas en la enseñanza secundaria de las matemáticas es una realidad después de muchos años. Este fenómeno estuvo preparado por los discursos que insisten sobre los aportes de la 'visualización' a las conceptualizaciones matemáticas. En contrapunto a esos discursos, la investigación educativa, especialmente francesa (Guin y Trouche, 1999), ha demostrado que la realización de las potencialidades de esos 'instrumentos' es problemática, haciendo hincapié en la interdependencia de los procesos 'de instrumentación' y de conceptualización.

Hoy en día, la aparición en las manos de los estudiantes de funcionalidades simbólicas en las calculadoras 'complejas' o en los programas de 'cálculo formal', es un hecho de actualidad. Más aún que las calculadoras gráficas, la presencia de esas herramientas en la práctica cotidiana de los estudiantes exige a la enseñanza la consideración de una 'génesis instrumental' donde los esquemas de uso se desarrollen conjuntamente con los conocimientos propiamente matemáticos.

Al estudiar la implementación de proyectos de enseñanza del análisis en los dos últimos años de la escuela secundaria en Francia, Lagrange (1999b) y Trouche (2000) muestran en qué medida influyen los esquemas estudiantiles de utilización del instrumento en las conceptualizaciones, y la atención que la educación debe prestar a su desarrollo.

De manera paralela, los discursos dominantes sobre la introducción de las tecnologías insisten sobre el carácter a priori positivo de esa introducción. El uso de la tecnología mejoraría aquello que se considera la parte "noble" de la actividad matemática --la comprensión, el estudio a profundidad de los conceptos-- al reducir la parte "rutinaria" que constituyen las manipulaciones técnicas.

Así, los cambios en la enseñanza de las matemáticas se inscribirían dentro de una "revolución tecnológica" (Pérez Fernández, 1998, p. 347) donde el equipo de cómputo permitiría una enseñanza "experimental" de las matemáticas (ibíd., p. 346).

Existe, por lo tanto, un contraste entre, por un lado, una realidad donde el efecto de la calculadora o la computadora debe ser analizado en todo momento de la enseñanza, sin ser a priori positivo y, por el otro, los discursos donde la tecnología conduciría 'lógicamente' a cambios cualitativos en la enseñanza.

Este contraste obliga a reconsiderar los fundamentos sobre los que descansan esos discursos mediante el estudio de los siguientes temas:

- ¿De dónde proviene la idea de las 'matemáticas experimentales'? ¿Qué papel juega la tecnología dentro de su desarrollo? ¿Qué problemas plantea su transposición a la enseñanza?
- ¿De qué manera, la utilización de la tecnología modifica el acceso de los alumnos a los conceptos? ¿Qué nuevas relaciones existen entre la comprensión de los conceptos y la parte más técnica del trabajo matemático?

Voy a estudiar esas dos cuestiones apoyándome en los resultados de seis años de experimentación con sistemas de cálculo simbólico en la educación secundaria francesa, en primer lugar sobre el software DERIVE (Lagrange, 1996, Artigue, 1997), después sobre la calculadora 'compleja' TI-92 (Lagrange, l999a; Lagrange, 1999b; Guin y Trouche, ibid).

El software de cálculo simbólico constituye, en efecto, una de las herramientas tecnológicas más recientemente disponibles, y a la que, en el discurso, se le acreditan las más ricas potencialidades. Además, este marco experimental es particularmente adecuado para una confrontación entre los discursos sobre las potencialidades de la tecnología y la realidad de las clases.

Fueron, en efecto, lecciones largas (un año escolar) en un plan de estudios nacional: se debían desarrollar, en las aulas equipadas con el software y las calculadoras, las aptitudes matemáticas comparables a aquellas de los estudiantes de otras clases, explotando las potencialidades de esos sistemas y evitando las trampas de un uso no razonado de la tecnología.

Voy entonces a presentar brevemente las características de los sistemas de cálculo simbólico que parecían pertinentes para el análisis de su uso en las matemáticas de la escuela secundaria. Enseguida, en función de estas características y los resultados de los experimentos, estudiaré los dos temas: el de la matemática experimental y el de la posibilidad de una enseñanza que privilegie los conceptos.

A partir de este estudio, demostraré la imposibilidad de diseñar, o de analizar, una enseñanza con sistemas de cálculo simbólico, sin tener en cuenta las técnicas nuevas y las habituales que interactúan en la actividad matemática de los estudiantes, así como las perspectivas abiertas por esta consideración.

2. Los sistemas de cálculo simbólico

La disponibilidad de las funcionalidades de cálculo simbólico en programas tales como Macsygma, Maple, Mathematica, DERIVE, y en las calculadoras, es bien conocida. En Francia, el término 'cálculo formal' se utiliza para nombrar tanto al dominio de investigación que tiene como objetivo crear y evaluar algoritmos para el procesamiento de expresiones matemáticas (Davenport et al., 1986), como al trabajo de innovación conducido en la enseñanza en torno a la introducción del software que implementa esos algoritmos (Juge, 1994). En la literatura anglosajona, el software, en particular el que se propone a los estudiantes, se denomina 'Computer Algebra Systems'.

De esta muestra de la terminología empleada, retendremos la filiación que une al software utilizable en la enseñanza y un dominio de investigación en la frontera de las matemáticas y la informática. Retendremos también la idea de "Sistema": las funcionalidades de cálculo simbólico no existen por sí mismas, sino que se proponen dentro de un entorno de software 'dedicado a las matemáticas', en especial las facilidades gráficas y numéricas. Estos sistemas tienen dos características que afectan la actividad matemática escolar en las situaciones escolares de uso: la inmediatez de los gestos, y el fenómeno de la doble referencia.

Un sistema de cálculo simbólico permite a su usuario practicar los 'gestos' que también existen, aunque de manera diferente, en la práctica 'habitual'. Un 'gesto' es, por ejemplo, calcular un límite, obtener la derivada de una función dada. El "sistema" incluye las facilidades gráficas que permiten también gestos tales como la obtención de la gráfica de una función en una ventana dada, los distintos *zooms*, la identificación de un punto característico sobre la gráfica o la tabla de valores. . .

La principal característica de los gestos permitidos por la tecnología es su inmediatez: si el sistema da un resultado, el usuario lo obtiene inmediatamente después de la emisión del comando. Esta inmediatez es rara en la práctica habitual. Un cálculo de límite 'a mano', por ejemplo, requerirá de tiempo, esfuerzo, apelar a imágenes mentales, a estrategias de verificación.

Contrastaremos, por lo tanto, la 'inmediatez' de los gestos tecnológicos con el carácter 'laborioso' de los gestos habituales.

Por lo tanto, los sistemas de cálculo simbólico permiten gestos múltiples, a menudo rápidos y económicos en reflexión. Gracias a esto, en las observaciones de situaciones de resolución en los experimentos de DERIVE, vimos que los alumnos se mantienen activos de cara a unas dificultades que, en la práctica habitual, los llevarían a una situación de bloqueo.

En algunos casos, esta actividad podría producir numerosos observables, una verdadera actividad experimental. En otros casos, el bajo costo de las acciones y los cambios de acción favorecen conductas de "pesca", pero poco organizadas, o incluso de una mera colecta de resultados. Discutiré más adelante las condiciones bajo las cuales una verdadera actividad experimental puede ser desarrollada.

El uso de un sistema de cálculo simbólico sitúa también al usuario en una 'doble referencia' (Artigue, 1997, p. 152): tiene, por un lado, significados matemáticos y, por el otro, tiene los significados más específicos de las restricciones de un sistema informático. En efecto, el uso de un sistema tal no se realiza por sí mismo: los significados involucrados, especialmente en situaciones de aprendizaje, son los significados matemáticos habituales.

El sistema es en consecuencia concebido para que sus respuestas puedan ser interpretadas de acuerdo con sus significados. Pero, por lo demás, opera bajo las restricciones de un sistema automático que en sus usos matemáticos tiene una lógica sólo en apariencia conforme a los usos matemáticos.

Planteemos un ejemplo: los estudiantes debían convertir en un producto la expresión trigonométrica) con la ayuda de DERIVE. Tenían a su disposición una función programada, que les dio la expresión . Ellos debían simplificar esta expresión a .

En DERIVE, las simplificaciones trigonométricas operan sobre toda la expresión y los ensayos de los alumnos resultaron en ya sea la expresión inicial o bien en una expresión carente de interés para el problema: . Los alumnos no podían entender que la simplificación en - -la cual es inmediata con papel y lápiz-- no pudiera ser producida directamente por DERIVE. Ellos se imaginaban que DERIVE funcionaría según la lógica matemática habitual, sin tener conciencia de los algoritmos de simplificación en funcionamiento2.

Así, la interacción con un sistema de cálculo simbólico opera bajo una "doble referencia": de una parte, en significados matemáticos 'habituales' y, de la otra, en la lógica algorítmica del sistema. En las primeras situaciones observadas, especialmente las arriba reportadas aquí, y la situación de factorizaciones de Artigue (1997), sobre la cual regresaremos en el apartado 5, la intervención de referencias a esta lógica algorítmica del cálculo simbólico, no prevista por el profesor, produjeron un efecto negativo sobre las situaciones: los estudiantes no pudieron situarse dentro de las significaciones matemáticas esperadas por el profesor y, tratando sin éxito de interpretar el funcionamiento de DERIVE, se multiplicaron las acciones con el software.

Posteriormente, este fenómeno pudo ser mejor comprendido y, así, mejor anticipado por los profesores que participaron en los experimentos. Las condiciones más favorables, que vamos a estudiar enseguida, permiten hacer productiva la 'doble referencia'.

3. Las matemáticas experimentales

Hemos visto anteriormente que la inmediatez de los gestos, en los sistemas de cálculo simbólico, permiten a los estudiantes el ser activos. Pero no garantiza la productividad matemática, la cual le daría a esa actividad un carácter realmente "experimental". Es la misma 'doble referencia' la que, si el estudiante no la domina, le impide dar una dimensión matemática a la reflexión sobre los observables.

Esto relativiza los discursos según los cuales una nueva enseñanza 'experimental' de las matemáticas estaría a la orden del día. Voy a analizar esta distancia entre los discursos y la realidad como un intento de "transposición didáctica" (Chevallard, 1985) y, sin embargo, no controlada.

La investigación en matemáticas siempre ha tenido una dimensión experimental. Lo que es nuevo, con el avance de la informática, es que esta dimensión tiende a salir del trabajo privado del matemático para conseguir un carácter oficial. Las conjeturas producidas con la ayuda de programas de computadora, los datos en apoyo de la conjetura, los métodos de obtención de conjeturas pueden ser presentadas, discutidos como un trabajo matemático válido.

Una cierta especialización puede existir, la publicación de los resultados experimentales por los matemáticos pueden motivar la búsqueda de una prueba por los demás. Es, por tanto, posible considerar las "matemáticas experimentales' como un dominio nuevo con una dimensión práctica (Borwein et al, 1996) -- la producción de procedimientos de producción de investigación y de transmisión sistemática de conjeturas-- y una dimensión teórica --la definición de las estructuras de dominios matemáticos suficientemente generales para permitir esta producción.

Esta nueva visibilidad de las "matemáticas experimentales" contribuye al clima favorable para la introducción de herramientas informáticas en la enseñanza de esta disciplina. La didáctica es estudiada como un fenómeno de "transposición" de la existencia de saberes o prácticas comparables dentro de dos instituciones, a saber, las matemáticas experimentales en la investigación y en la enseñanza secundaria.

Es así posible identificar esta transposición en las orientaciones curriculares en materia del uso de la tecnología cuando, por ejemplo, los programas nacionales para los liceos franceses asignan a la utilización de la calculadora el papel de 'combustible investigativo'3.

Analizar la "transposición didáctica" (Chevallard, ibid., p. 14) es considerar las "génesis, filiaciones, rupturas y refundaciones” que hacen que el funcionamiento didáctico del saber y el funcionamiento sabio sean diferentes, al mismo tiempo que constituyen dos regímenes de saber en interrelación. Un saber, un tipo de actividad, existen a la vez tanto en la esfera académica como en la de la enseñanza, similares por su naturaleza común, pero sumisas --dentro de su institución-- a las restricciones correspondientes de funcionamiento.

Así, las "matemáticas experimentales" han encontrado su función en la investigación matemática mediante el desarrollo de un campo tanto técnico como teórico. Dentro de la enseñanza, las matemáticas experimentales son más problemáticas. Características tales como la inmediatez y la doble referencia pueden enganchar a los estudiantes hacia adentro de una actividad inútil, aunque puedan asegurar la productividad de las tecnologías dentro de la investigación.

Otros obstáculos provienen de la concepción de las situaciones de aprendizaje que sobrestiman la posibilidad de que los alumnos descubran espontáneamente los conceptos a partir de su actividad con un programa de software, tal y como veremos al recordar dos observaciones.

Una hipótesis que se formula con frecuencia es que un sistema de cálculo simbólico permitirá vincular experimentalmente dos manifestaciones de una misma propiedad en las distintas representaciones --o, más precisamente, en los diferentes registros en el sentido de Duval (1996)--, pero la preparación que los estudiantes necesitan para realizar tal vinculación es a menudo subestimada.

Por ejemplo, Wain (1994) observa que los estudiantes de 14-15 años deben establecer con DERIVE un vínculo entre los ceros de un gran número de funciones, y las intersecciones de las curvas representativas con el eje de las abscisas. Cuando los valores no son enteros, algunos estudiantes no pueden reconocer el valor decimal leído en la ventana gráfica como una aproximación de la solución obtenida en la ventana algebraica, lo cual hace inoperante el trabajo de puesta en relación de la lectura gráfica y la resolución simbólica prevista por el profesor.

Para que la experimentación de los alumnos sea eficaz, tendrían que tener una cierta preparación para una consideración informada de la relación entre el valor exacto y el valor aproximado, y reconocer así el carácter aproximativo de los valores leídos en la ventana gráfica. Los enfoques recientes sobre el uso de las calculadoras complejas (Guin y Delgoulet, 1996, pp. 42-45, por ejemplo) incluyen esta preparación como un componente esencial de una instrumentación eficaz.

El cálculo formal es a menudo visto como permitir a los estudiantes que realicen experiencias sobre los fenómenos simbólicos, e inferencias sobre las estructuras simbólicas. Aquí, también, la capacidad de los estudiantes para operar una verdadera generalización matemática es a menudo sobrevalorada. Pozzi (1994) reporta, por ejemplo, una observación de los estudiantes a quienes se les pidió encontrar una regla general para la derivada del producto de un polinomio por una función trigonométrica, experimentando a partir de derivadas obtenidas con DERIVE.

Pozzi nota que la dificultad de los estudiantes consistió en que ellos razonaron sobre las formas de escritura dadas por DERIVE (su sintaxis) mientras que, para que la experimentación lograra su propósito, se necesitaba que razonaran sobre la estructura de las expresiones obtenidas (su semántica). Él concluye que, en dicha actividad, lejos de descubrir las estructuras matemáticas, los estudiantes pueden crear modelos erróneos que se constituyen en "misconceptions".

Durante la experimentación de la calculadora 'compleja' TI-92 (Lagrange 1999b, pp. 73-75), investigamos las condiciones para que los alumnos pudieran tener una verdadera actividad experimental sobre los fenómenos simbólicos relacionados con los límites y las derivadas. Dos condiciones parecen necesarias. La primera es que los estudiantes tengan un conocimiento suficiente del concepto en juego, así como de la forma en que la máquina lo trata.

Para la "doble referencia' funcione de manera productiva, el estudiante debe ser capaz de separar, dentro de los resultados que se obtienen, los fenómenos generados por el algoritmo de aquéllos que tienen un significado matemático.

Figure 1. TI-92.

* diff(f(a*x),x);

*

a D(f)(a x)

Figure 2. Mupad.

Por ejemplo, nosotros hemos planteado a los estudiantes la cuestión de la derivación de una función compuesta cualquiera y una función lineal . En una primera aproximación, los estudiantes se limitaron a 'ingresar el problema dentro la TI-92'. Como la pantalla (Figura 1) lo muestra, la máquina pasa de una expresión ingresada en línea con una expresión diferencial que los estudiantes han transcrito con la ayuda de la notación 'prima' usada en la secundaria .

En este caso, la transcripción es tramposa. En efecto, contrariamente a los otros sistemas como Mupad (Figura 2) la TI-92 no tiene la notación para la derivada de una función. Algunos estudiantes piensan entonces que el número derivado de la composición en el punto , está correctamente dado por la máquina como lo que constituye una 'misconception' en el sentido de Pozzi (ibíd.)

Otros estudiantes, entrenados para observar críticamente los resultados de la máquina, notaron que las dos expresiones que aparecen en la TI-92 eran los mismos. Sabiendo que la expresión de la izquierda reescribe --bajo la forma matemática-- la expresión ingresada sin transformar, y que la expresión de la derecha resulta de una simplificación, fueron capaces de poner en evidencia que la TI-92 no da simplemente la respuesta, e involucraron a la clase en un enfoque alternativo: tratar de derivar funciones conocidas.

Este enfoque demostró ser productivo gracias a las funciones trigonométricas. Habíamos, de hecho, previsto esta necesidad de observables significativos por los estudiantes en una reunión anterior en que trabajaron las derivadas de funciones trigonométricas: las funciones polinomiales no dieronobservables suficientemente significativos.

Una segunda condición para que una actividad experimental pueda realmente existir es que una pregunta verificable debería ser puesta a prueba. Muchos fenómenos simbólicos no son en sí mismos problemáticos para los estudiantes. Éste es el caso de los fenómenos de conservación. Por ejemplo, el hecho de que el límite de la suma de dos funciones en un punto es la suma de los límites. Lo mismo sucede en casos de no conservación, como la indeterminación de los límites, o la obtención del producto de dos funciones. Estos demandan una 'puesta en escena' por el profesor para que los alumnos se involucren en las anticipaciones mediante las cuales conciben estructuras generales.

Durante el experimento TI-92, para problematizar el tema de las técnicas algebraicas del cálculo de límites, hemos centrado la investigación en los casos de indeterminación. Nos organizamos con los estudiantes, mostrando de entrada, con la ayuda de la TI-92, que el límite de la suma de una función tiende a más infinito y que una función que tiende a menos infinito no es necesariamente nula. Después pedimos a los estudiantes que produjeran ejemplos para determinar, en una primera fase, cuáles valores pueden ser obtenidos en este caso y, en una segunda fase, cuáles son los casos de indeterminación de límites de productos. El caso del producto de una función con un límite de cero y una función con un límite infinito fue objeto de un largo debate en clase. Muchos estudiantes pensaban que este producto era necesariamente un límite nulo y produjeron ejemplos consecuentes. El descubrimiento realizado por un alumno de un ejemplo de límite distinto de cero provocó la búsqueda de otros ejemplos.

En este apartado, quería indicar los obstáculos a que se enfrenta una actividad experimental, en el milieu escolar, con una herramienta informática, y que el objetivo de esta actividad es interactuar con las representaciones o la extracción de estructuras en general. Mediante ejemplos de la experimentación con TI-92, he demostrado que el trabajo de diseño de las sesiones es necesario, para asegurar que los estudiantes estén adecuadamente preparados para esa actividad.

Así, la transposición de las "matemáticas experimentales", de la investigación a la enseñanza, es más problemática de lo que los discursos generales permiten pensar. Nos percatamos, a través de los ejemplos, que no hay un milagro a esperar aun cuando, gracias a los nuevos gestos permitidos por la tecnología, los estudiantes disponen de observables más numerosos y más fáciles de obtener, que la enseñanza puede ser la economía de una estructuración del campo a explorar, así como de una organización en las técnicas de esos gestos de exploración.

4. La oposición entre comprensión y habilidades

En los discursos sobre los beneficios de la tecnología, la oposición entre los conceptos y las 'habilidades manipulativas' es, junto con las "matemáticas experimentales", otro tema muy común. En la literatura internacional de lengua inglesa, esta oposición se marca entre los dos términos '(conceptual) understanding' y '(manipulative) skills'4.

Más allá de las diferencias del idioma, la oposición se sitúa bien entre la comprensión de un dominio teórico y las habilidades prácticas, manipulativas, que posibilitan la actividad dentro del dominio, pero también con frecuencia se consideran como vacíos de sentido. En esta sección yo voy a interrogar esta oposición y su corolario implícito: la tecnología, al liberar al alumno de la práctica de las habilidades manipulativas, permite trabajar directamente los conceptos.

Rachlin (1989) señala que la tensión conceptos/manipulación es antigua, especialmente en la enseñanza del álgebra.

> *Los maestros (en USA), incluso (en 1980) se opusieron a lo que veían como un énfasis excesivo en habilidades de manipulación y abogaron por un tratamiento significativo del álgebra que atrajera más comprensión.*

Después de veinte años, las nuevas tecnologías se presentan como una posibilidad para disminuir la parte de la manipulación y reequilibrar las matemáticas escolares en favor de la comprensión. Después de una conferencia celebrada en marzo de 1987 sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, Kieran y Wagner (1989) reportaron las hipótesis emitidas en una sesión dedicada a la tecnología:

> *On the assumption of the universal access to the new technology, we now have the tools that enable us to modify our skill-dominated conception of school algebra and rebalance it in favour of objectives related to understanding and problem solving.*

Entre los medios tecnológicos propuestos para el aprendizaje de las matemáticas, el cálculo simbólico aparece como un medio privilegiado para una reequilibración a favor de lo conceptual, ya que es de alguna manera "más matemático" que otras tecnologías, gracias a los cálculos en modo exacto, y a la posibilidad de utilizarlo sin programar. Fey (1989) precisa:

> *(.. .) the use of symbol manipulation software in teaching calculus does permit greater emphasis on concept development and problem solving and this range of priorities pays off in greater student understanding and skill in those aspects of the subject.*

Numerosos trabajos de investigación han planteado así como hipótesis una fuerte separación de las dimensiones conceptuales y técnicas y se dan como objetivo a promover, dentro de la utilización de los sistemas de cálculo simbólico, la dimensión conceptual. Estas hipótesis se han propuesto y probado por estudio comparativo dentro de las tesis sostenidas en 1984 en los Estados Unidos.

Heid (1988) es un ejemplo muy notable de este tipo de investigación. Así, Pérez Fernández (ibid, p. 362) extrae el argumento --de este estudio, entre otros--, que debe darse a los sistemas de cálculo simbólico la capacidad, en sí mismos, para hacer progresar a los estudiantes 'hacia niveles superiores de pensamiento formal'. Voy, en este apartado, a estudiar esta investigación y a confrontar sus resultados con lo que hemos aprendido de los experimentos de sistemas de computación simbólica en las aulas de secundaria francesa.

La tesis de Heid (ibid., p. 7) es que la utilización de la computadora permite remodelar ('refashion') la introducción del análisis, poniendo el acento sobre los conceptos, las aplicaciones y la resolución de problemas. De este modo, el autor propone modificar el orden tradicional ('resequence') que daría prioridad (en el tiempo y la duración) a las habilidades ('skills') sobre la comprensión de los conceptos.

Una primera observación es que, con quince años en retrospectiva, la experiencia de Heid mantiene toda su actualidad. El software, todavía rudimentario en esa época (un graficador y un programa simbólico separados y poco interactivos), es puesto al servicio de una nueva propuesta de introducción al análisis que el autor enseña con pasión. Las aproximaciones gráficas a los conceptos, la reflexión sobre el significado de los resultados se alientan, los estudiantes se enfrentan a grandes clases de problemas.

El autor se abstuvo, en las primeras 12 semanas de una instrucción con duración total de 15, de desarrollar en los estudiantes las habilidades tradicionales en análisis: cálculo algebraico de límites, de derivadas, de primitivas, trazado de gráficas de funciones y estudios de variaciones. El autor insiste en el mejor desempeño de sus estudiantes en comparación con un grupo que recibió la instrucción tradicional de las 'cuestiones conceptuales'.

El examen de ambos grupos demuestra que los estudiantes "experimentales" no sufrieron retraso en el desarrollo de sus habilidades de cálculo. El estudio de Heid tiene así su interés, en tanto que experimentación de una enseñanza nueva del análisis, dentro de un contexto donde la computadora permite un más fácil acceso a ciertos enfoques.

En segundo análisis, el contraste entre comprensión y habilidades manipulativas ('skills') engendra un malentendido sobre la posibilidad de existencia de una enseñanza dirigida directamente a los conceptos. En efecto, el estudio de los resultados obtenidos por Heid demuestra, en mi opinión, que la enseñanza presentada por el autor simplemente como "centrada en los conceptos" recubre los complejos procesos de aprendizaje donde las técnicas no pueden estar ausentes.

Según Heid (Ibíd. p. 15), los estudiantes experimentales “atestiguaron mayor comprensión conceptual". La lectura de fragmentos de entrevistas presentados en el artículo muestra, de hecho, en los estudiantes, una cierta capacidad de movilizar las distintas representaciones de los conceptos en varios niveles. Por ejemplo, interpretan un máximo de una función dos veces diferenciable como un punto de la curva representativa donde la pendiente pasa de un valor positivo a un valor negativo y recuerdan así una regla para distinguir un máximo, de otros puntos donde la derivada se anula, por el signo de la segunda derivada.

Los estudiantes del grupo de control solamente apelan a esta regla, que han memorizado mal, por no comprenderla. Heid nota, sin embargo (ibíd., p. 17), que los estudiantes experimentales no adquirieron "una noción clara del límite y la razón de cambio, típicamente difícil" y no se distinguen así del grupo control.

Heid también apoya su análisis en los resultados comparativos de los estudiantes experimentales y los del grupo de control con las preguntas 'conceptuales'. Los alumnos experimentales tienen resultados globales ligeramente mejores, pero las preguntas donde superan significativamente a otros estudiantes son poco numerosas. Consideremos una de esas preguntas:

> *Hasta ahora en el curso no has aprendido ninguna regla para encontrar la derivada de una función como . Explica cómo puedes encontrar (4).*

Heid no da ninguna otra información más que el porcentaje de éxito. Este porcentaje es insignificante en el grupo control, y se aproxima al 15% entre los estudiantes experimentales. Mi interpretación es que los estudiantes fracasan porque sólo conciben el número obtenido como un valor en un punto de la función derivada, estando esta función restringida en sí misma como resultado de una manipulación simbólica sobre la función original.

Por lo que ellos estarán desamparados por la ausencia de la "regla de derivación" para funciones exponenciales. Un error común es, en este caso, la invención de una regla simbólica errónea de derivación, por ejemplo, aquella que, inspirada en la derivación de polinomios, resultará en y, por lo tanto . En contraste, un alumno que tiene presente en su mente una definición de la derivada como límite del cociente diferencial,puede tener éxito al expresar este límite con los datos del enunciado. Además, haciendo la liga con la representación gráfica de las exponenciales, podrá rechazar la derivación que daría una pendiente cero en el origen.

El éxito de algunos alumnos experimentales parece así demostrar que la enseñanza "con tecnología" constituye un terreno favorable para que el número derivado pueda existir en la comprensión de muchos estudiantes, sin ser "aplastado" por la derivación simbólica, lo que confirma la tendencia observada en las entrevistas de movilizar y articular las variadas representaciones.

Sin embargo, no parece posible atribuir esta tendencia a la tecnología por sí misma. De hecho, la influencia de la tecnología no es necesariamente positiva: los gestos 'inmediatos' de cálculo formal pueden instalar (al igual que los gestos "laboriosos" de papel y lápiz) una comprensión estrecha de los conceptos del análisis como objetos simbólicos. Monaghan et al. (1994) lo han demostrado claramente a propósito de los límites. Para los estudiantes que utilizan DERIVE, el concepto está estrechamente vinculado con el gesto de obtención de un límite con este software.

Conviene, por tanto, en primer lugar, relativizar la interpretación del artículo dado dentro de los discursos referidos arriba. La tendencia constatada, por muy interesante que sea, no puede ser calificada de progreso decisivo "hacia niveles superiores de pensamiento formal". Tenemos también que interrogar sobre la contribución de la tecnología a esta tendencia. El artículo de Heid no permite realmente apreciar esta contribución por falta de informaciones sobre la organización de la enseñanza.

En contraste, las experimentaciones realizadas en Francia (Lagrange, 1999b, p. 73) sobre la integración de las calculadoras complejas, nos permitió percatarnos de que existen condiciones para que la tecnología contribuya a la formación en los alumnos de representaciones variadas de los conceptos y que esas condiciones no son fáciles de establecer, incluso por los profesores conscientes de los posibles efectos reductores del cálculo formal.

Una representación de un concepto no existe sin las técnicas que le están asociadas. Ahora bien, la técnica de obtención de un resultado simbólico con la ayuda de la calculadora tiende a imponerse por su simplicidad y eficacia, a expensas de las técnicas más laboriosas, basadas en otras representaciones. Una primera condición es así que, cotidianamente en situaciones de uso de la calculadora, se aliente el uso de diferentes representaciones y técnicas asociadas: por ejemplo, si los estudiantes se ven tentados a usar el cálculo formal para un límite como ——, será necesario que el profesor invoque la representación gráfica de la función —— , donde una mayoración por la función − pueda mostrar que el "razonamiento" es a veces más económico que la máquina.

Para que los estudiantes puedan movilizar de manera equilibrada diferentes comprensiones de un concepto es necesario también que la organización de la enseñanza tome en cuenta las nuevas técnicas. Por ejemplo, en la experimentación TI-92 se ha trabajado para desarrollar la comprensión entre los alumnos comprensiones variadas del concepto de derivada, articulando diferentes registros de la derivada, "enactiva" y "manipulativa'5 (Tall, 1996), y diferentes estatutos del concepto, "herramienta" y "objeto" (Douady, 1986).

Las actividades se organizaron para que los estudiantes tomaran conciencia de los fenómenos diferenciales de manera "enactiva", en especial dentro de la ventana gráfica de su calculadora, y reencontraran los límites de un estudio gráfico de esos fenómenos. Tomó después un largo tiempo para que los alumnos desarrollaran técnicas algebraicas de estudio de estos fenómenos, empezando con el desarrollo de técnicas de papel y lápiz, y luego la adaptación y la sistematización en la ventana de algebraica. Fue sólo después de este trabajo que los estudiantes reencontraron las propiedades algebraicas de los límites y las derivadas, como base para nuevas técnicas "manipulativas" de obtención de derivadas.

Después de haber estudiado la derivación como 'objeto', los alumnos pudieron utilizarla después como una "herramienta" en problemas de optimización. Estos problemas existían para ellos en las clases anteriores mediante enfoques gráfico-numéricos permitidos por calculadoras gráficas y después mediante técnicas algebraicas, muy laboriosas en papel y lápiz.

La derivación les permitió complementar estos enfoques con las técnicas formales permitiendo la búsqueda de soluciones exactas para clases más grandes de problemas. Luego, en un momento en que el carácter herramental de la derivación pudo hacer olvidar los aspectos conceptuales de la derivación, los estudiantes tuvieron que hacer un trabajo en cinemática que constituyó a la vez un retorno al estatuto "objeto" y al registro "enactivo".

Confrontando así el estudio de Heid con esta experiencia de integración de un sistema de cálculo simbólico, me parece sin duda, que las habilidades manipulativas tienden a ocupar menos espacio en los aprendizajes que en una enseñanza sin computadoras pero, hasta ahora, la tecnología no permite una enseñanza "directamente conceptual". El camino de los alumnos hacia la comprensión permanece largo y peligroso.

Como en papel y lápiz, ellos necesitan, a partir de tareas cuidadosamente organizadas por el profesor, elaborar las técnicas de resolución como las bases sobre las que se pueden desarrollar unas comprensiones lo suficientemente ricas de los conceptos. La oposición entre conceptos y habilidades manipulativas enmascara así un punto esencial. Existe una dimensión técnica en la actividad matemática de los estudiantes que no puede ser reducida a las habilidades. Cuando la tecnología es utilizada, esta dimensión es diferente, pero conserva su importancia en el acceso de los alumnos a la comprensión.

Nos encontramos de nuevo entonces, como una cuestión central, el lugar de las técnicas dentro de los aprendizajes, del que nos habíamos percatado ya mediante el análisis de las condiciones para que el uso de medios informáticos se inserte dentro de una real actividad experimental. El siguiente apartado va a precisar lo que es una técnica, en qué se distingue una técnica de una "habilidad manipulativa", y qué papel pueden ellas desempeñar en la conceptualización.

5. Las técnicas

Mercier (1996) mostró la génesis de la idea de técnica a partir de las dificultades encontradas en la enseñanza del álgebra. Esta génesis me parece particularmente esclarecedora para comprender el papel de las técnicas en la enseñanza y el aprendizaje. Aquí está una presentación en unas pocas líneas.

A partir de su reflexión, Mercier subraya el riesgo de que el álgebra desaparezca de las matemáticas escolares como resultado de las dificultades encontradas por los alumnos y la importancia dada a la resolución de problemas y a los métodos numéricos. Las 'habilidades' algebraicas son presentadas con frecuencia, en los discursos sobre la enseñanza, como carentes de sentido, y las calculadoras y hojas de cálculo podrían ser utilizados por los estudiantes como una ayuda a la exploración y a la resolución numérica de problemas, ¿por qué continuar exigiendo una resolución simbólica en la que muchos fracasan?

Mercier muestra a continuación el poder del álgebra, su lugar potencial como fundamento de las matemáticas escolares. En la búsqueda de motivos de la difícil posición del álgebra en la realidad de las prácticas matemáticas de los alumnos, Mercier pone de relieve el efecto de las sucesivas reformas que han llevado a que las técnicas algebraicas se hayan reducido a habilidades aisladas y sin sentido.

Por un lado, la enseñanza insiste menos sobre la prueba, las tareas que esas técnicas han contribuido a resolver ya no existen más. Por otro lado, el énfasis puesto en los aspectos prácticos de la resolución hace que no haya más reflexión teórica sobre las manipulaciones algebraicas, las cuales posibilitan convertir a las entidades matemáticas en una parte entera.

Parece ser, así, que las técnicas no pueden existir de manera aislada en la enseñanza y el aprendizaje. De esta observación surgió la idea de praxeología. Según Chevallard (1999, p.223), *"toda actividad humana realizada con regularidad* (es decir, llevada a cabo dentro de una institución) *puede subsumirse a un modelo, que se resume (...) en la palabra praxeología".* El modelo está organizado en varios niveles. El primer nivel es el de las tareas. En el segundo nivel, las técnicas son los modos particulares, "adecuados", de realizar esas tareas dentro de la institución. En el tercer nivel, aquel de las teorizaciones, se encarga de cuestionar las técnicas acerca de su consistencia y su dominio de validez. Este es el nivel donde un lenguaje específico aparece, donde los conceptos emergen6.

La enseñanza / aprendizaje de un tema de matemático dentro de una institución didáctica (o, como lo dice Chevallard, 'el estudio de una obra') es una actividad humana particular, con una "dinámica" específica que va a conducir a "recrear la obra'. Dentro de esta dinámica, las tareas son en primer lugar los problemas. Las técnicas se elaboran en relación a las tareas y luego se jerarquizan. Las técnicas oficiales emergen y las tareas 'se rutinizan' y devienen los medios para perfeccionar esas técnicas.

El medio ambiente teórico se constituye para dar cuenta de las técnicas, de su funcionamiento y de sus límites. Se desarrolla más tarde, durante el curso de un 'trabajo de la técnica' orientado a un tiempo tanto al mejoramiento de la técnica como a su gestión7.

A partir de este enfoque, es posible ver una técnica como un conjunto de gestos (en el sentido del apartado 2) que encuentran su significado matemático dentro de una doble relación con, por una parte, las tareas que ella permite cumplir y, por la otra, con las teorizaciones a que ella puede dar lugar. Consideremos, por ejemplo (Chevallard, ibid. P. 243), la técnica clásica de la reducción de las expresiones del tipo ———, a, b, c, d números enteros.

Una tarea de aproximación es una motivación para desarrollar esta técnica, la forma reducida permite más fácilmente un encuadre. De manera más fundamental, esta técnica encuentra su interés al proporcionar un sistema de escritura "canónica" que permite reconocer fácilmente la igualdad de cocientes como ——— y ———. En el plano teórico, la idea de que esta técnica "siempre funciona" conduce a la estructura del cuerpo de extensión algebraica al tiempo que aporta un algoritmo para la obtención de las coordenadas de un elemento en la base canónica.

Por supuesto, una técnica puede existir en ciertos momentos como una "habilidad manipulativa". Este es particularmente el caso cuando una cierta "rutinización" es necesaria: todos tuvimos --en el período bastante reciente donde los únicos instrumentos de trabajo matemático fueron el papel y el lápiz-- nuestro entrenamiento en las técnicas de cálculo numérico o simbólico y, en este periodo de entrenamiento, separamos las tareas y las teorías que dan sentido a estas técnicas. Es cierto que la disponibilidad de nuevos instrumentos disminuye la urgencia de esta rutinización. El estudio de Heid lo confirma. Pero no debemos considerar las técnicas solamente bajo su forma rutinizada. El trabajo de constitución de técnicas en respuesta a las tareas, y la elaboración teórica sobre los problemas planteados por esas técnicas se mantiene fundamental dentro del aprendizaje.

La disponibilidad de nuevos instrumentos ciertamente pone en duda el papel de las técnicas donde su lugar parecía bien establecido cuando teníamos sólo papel y lápiz. Por ejemplo, la TI-92 realiza en un gesto inmediato la reducción de aquí arriba mientras que la técnica de papel y lápiz combina varios gestos de manera laboriosa.

No obstante, la necesidad de un nivel técnico, intermedio entre las tareas y la teoría, permanece. La actividad experimental con la ayuda de la tecnología no se puede concebir como una emergencia directa de significaciones a partir de hechos simbólicos producidos por el instrumento. Las técnicas de exploración, de problematización son necesarias. El aprendizaje de conceptos, especialmente en el análisis, supone que los alumnos, a partir de tareas cuidadosamente organizadas por los profesores, desarrollen técnicas de resolución, utilizando o no la tecnología, como las bases sobre la que desarrollar comprensiones variadas.

Los nuevos instrumentos de trabajo matemático tienen así un interés, pero no porque permitan "saltar" el nivel de las tareas hasta aquel de las teorías, sino porque las nuevas técnicas que permiten desarrollar a los estudiantes, las cuales constituyen un puente entre tareas y teorías. Voy a mostrar en este apartado cómo el énfasis puesto en las técnicas dentro del uso de nuevas herramientas permite interpretar los fenómenos observados en situaciones de utilización de DERIVE.

El estudio sobre el uso de DERIVE en la educación secundaria en Francia, llevado a cabo a partir de septiembre de 1993, ha permitido establecer, gracias a la observaciones de clases acopladas a una encuesta vía cuestionarios sobre las expectativas de los profesores y las actitudes de los estudiantes, una observación sistemática de las dificultades encontradas y poner en marcha formas de solucionarlas (Lagrange, 1996; Artigue, 1997).

Los datos que recolectamos demostraron que, con algunas raras excepciones, el objetivo de la integración de DERIVE en la enseñanza no pudo ser alcanzado y que una utilización, incluso episódica, de DERIVE es más difícil de lo que los maestros esperaban. DERIVE fue percibido por los alumnos principalmente como una herramienta para realizar cálculos tediosos y comprobar los resultados obtenidos en entornos estándar, lo que corresponde a las características del software más fáciles de poner en funcionamiento.

Pocos estudiantes vieron DERIVE como una herramienta de comprensión, de aprendizaje, lo cual era el objetivo de los docentes. Una fracción importante de los estudiantes consideraron que DERIVE complica notablemente su trabajo matemático, lo cual reenvía a las dificultades de poner en obra el software, a menudo no previstas por el profesor.

Los datos recogidos de los maestros estuvieron también en desacuerdo con las potencialidades asignadas a priori a DERIVE. Los profesores informaron sobre las dificultades para poner en práctica sus ideas escribiendo, por ejemplo, que DERIVE a final de cuentas no elimina las dificultades de cálculo como ellos pensaban y que, incluso con la ayuda de DERIVE, es difícil de gestionar eficazmente las actividades experimentales.

Estas observaciones subrayan el efecto de una ausencia de reflexión sobre las técnicas dentro de expectativas de los maestros. En efecto, se suponía que los estudiantes debían percibir los aspectos conceptuales dentro de los resultados dados por DERIVE. Pero carecían de las técnicas que les habrían permitido introducir una racionalidad en la resolución sobre la cual hacer funcionar una reflexión teórica y, por tanto, sólo podían exhibir comportamientos de adaptación tales como el comportamiento de "pesca" subrayado en el apartado 2.

Las dificultades de poner en obra el software reflejan también un déficit en técnicas de utilización del software. La necesidad de estas técnicas no fue, con frecuencia, reconocida por los profesores. Incluso si el profesor reconocía una cierta existencia de esas técnicas, la suficiente para que los alumnos pudieran utilizar el software, no las utilizó como base para una reflexión teórica, porque le parecían muy alejadas de las significaciones matemáticas tal y como se construyen en situaciones habituales. La práctica del software estaría así muy separada de las situaciones habituales. Para los estudiantes, las técnicas de 'papel y lápiz' desarrolladas en esas situaciones siguen siendo aquellas que "tienen sentido" y, por tanto, no es sorprendente que, para ellos, el software no contribuya a la comprensión.

6. Examen de las técnicas relacionadas con el software

Voy a mostrar, con la ayuda de un ejemplo, cómo el análisis de la dimensión técnica del trabajo con tecnología ha permitido una mejor reflexión sobre la integración de un software como DERIVE. Se trata de la situación de las factorizaciones de , ya mencionada en el apartado 2.

El problema, planteado en primero S (onceavo grado de filiación científica), consiste en conjeturar y probar las factorizaciones generales de polinomios de la forma observando las factorizaciones para valores dados de n. Vamos a seguir la evolución de este problema, a través de las tres versiones del problema planteadas por Mounier y Aldon (1996).

En la primera versión, el problema se ha estudiado en una sola sesión, con lápiz de papel. De acuerdo a las observaciones de Mounier y Aldon, los estudiantes pueden encontrar fácilmente el factor x -1, y después, mediante división sobre algunos ejemplos, el cociente para x - 1. Por supuesto, los cálculos son tediosos y, después de este primer resultado, algunos estudiantes han buscado otras conjeturas.

En la segunda versión, también de una sesión, Mounier deseaba utilizar DERIVE para que los estudiantes pudieran encontrar más factorizaciones y por tanto extender su práctica experimental. Una dificultad es que el software proporciona factorizaciones completas que son las factorizaciones generales para ciertos valores de n. Por ejemplo, la factorización en dos factores sólo se obtiene para n primo. Los profesores creían que los estudiantes podrían encontrar las conjeturas observando las factorizaciones DERIVE, pero también que se alargaran lo suficiente para que no se escondieran la factorización general.

De hecho, esta operación es difícilmente posible para los estudiantes de liceo. He aquí un procedimiento típico de los alumnos. Ellos factorizan para n = 2 y 3 y conjeturan una factorización general en dos factores . Al factorizar para n = 4, ellos constatan una irregularidad para los n pares, la cual confirma la factorización de n = 5, 6, 7. Existen entonces para ellos dos factorizaciones distintas, una es válida para los impares y la otra para los pares: (x -1) (x + 1) . Ellos están tratando de confirmar, por ejemplo, para n = 9, pero entonces obtienen una factorización en tres factores: la cual pone en cuestión su conjetura. Ellos no avanzan más debido a que cualquier conjetura es inmediatamente desmentida por un nuevo ensayo.

Esta disfunción es una manifestación de los efectos negativos del fenómeno de la doble referencia mencionada en el apartado 2. Las factorizaciones DERIVE llegaron a ocultar las factorizaciones generales que constituían el objetivo matemático. Voy a demostrar que la ausencia de técnicas específicas para el uso del software es una de las causas de esta disfunción. En efecto, los estudiantes encontraron dos dificultades asociadas: una es entender las relaciones entre las distintas factorizaciones de un mismo polinomio y la otra es la ausencia de técnicas para seleccionar y desarrollar una parte de una factorización.

Un matemático sabe que una factorización de tres factores, por ejemplo, permitirá obtener factorizaciones en dos factores, por reagrupación. Incluso si él no conoce DERIVE, adivina que el software debe darle los medios de operar este reagrupamiento de dos factores. El alumno, por contra, no tiene una conciencia clara de la relación entre factorizaciones y no conoce los recursos del software. No es sorprendente entonces que no pueda desprenderse de las factorizaciones DERIVE para concebir factorizaciones más generales.

Seleccionar y desarrollar una parte de una factorización no es en efecto una manipulación trivial: ello supone conocer las funcionalidades específicas de copiar del software y de integrarlas en una comprensión del modo en que las expresiones factorizadas se forman. La elaboración de esta técnica es así un momento esencial, tanto para permitir continuar con la actividad como para dotarla de su dimensión matemática.

Así, la técnica reagrupación de factores en DERIVE será la clave para que el estudiante comprenda las relaciones entre las diversas factorizaciones. Ésta es, en efecto, la forma en que yo interpreto la tercera versión presentada por Mounier y Aldon. Esta versión tomó la forma de lo que en Francia llamamos un "problema largo". Los estudiantes tenían DERIVE en computadora portable. La primera sesión sirvió para plantear el problema y para introducir a los estudiantes a las técnicas de manipulación de los factores en DERIVE. Después, los alumnos pudieron practicar en casa, encontrar las conjeturas y las pruebas. En tres meses, los momentos se organizaron para que los estudiantes presentaran los avances de su trabajo y para que el maestro hiciera discutir las conjeturas producidas y recuperar la investigación.

La productividad del trabajo de la técnica durante esos tres meses se aprecia en el informe realizado por los estudiantes como resultado de la última sesión (Mounier y Aldon, ibíd. p. 59). El carácter general de ciertas factorizaciones es reconocido por tener una distancia suficiente de los observables de DERIVE. Una factorización DERIVE no trivial (para todo n potencia de 2) se demuestra mediante reagrupamientos sucesivos de dos factores, inspirada por la técnica experimental en el uso del software. La factorización de polinomios se generalizó a expresiones no-polinómicas a las que ciertos estudiantes finalmente le atribuyeron un sentido a partir de la equivalencia que ellos conocían entre y ¯.

Así, las técnicas de utilización de instrumentos tecnológicos, lejos de ser triviales o sólo relacionadas con el software, pueden ser vistas como elementos fundamentales para el necesario 'trabajo sobre la técnica'. En lugar de minimizar su importancia o de eludirlas, es bueno analizarlas, buscar los dispositivos que permiten a este trabajo su desarrollo.

7. Las nuevas praxeologías

Las técnicas son los elementos determinantes de las organizaciones praxeológicas, la aparición de técnicas 'innovadoras'8 entraña dificultades dentro de las praxeologías existentes y, por lo tanto, la necesidad de una adaptación de la enseñanza.

Una pregunta que a menudo surge es aquélla del futuro de las habilidades de papel y lápiz. A pesar de que ellas son puestas en peligro por la tecnología, pocos autores ven su desaparición pura y simple. La 'resecuenciación' propuesta por Heid es bastante representativa de una actitud general de prudencia. Esta actitud, sin embargo, abandona todo el problema. Voy a intentar demostrar que, al no considerar más el ángulo de las habilidades, sino este de las técnicas, es posible superar esta vaga impresión de que 'no todo hay que tirar' para estudiar la dinámica común de las técnicas nuevas y las habituales.

Dos ejemplos darán el panorama de la variedad de interacciones entre los dos tipos de técnicas en esta dinámica y por lo tanto de la riqueza potencial de las nuevas praxeologías permitidas por los instrumentos informáticos. Enseguida veremos los problemas planteados en los diferentes niveles de la institución didáctica para la constitución de estas praxeologías.

Un "défi" : pour tout entier n trouver la nième dérivée de $(x^2+x+1)e^x$ (d'après Trouche et al., 1998)

1. Résolution avec DERIVE

   Recherche de pattern

$$\frac{d}{dx}((x^2+x+1)e^x) = e^x(x^2+3x+2)$$

$$\frac{d}{dx}^2((x^2+x+1)e^x) = e^x(x^2+5x+5)$$

$$\frac{d}{dx}^3((x^2+x+1)e^x) = e^x(x^2+7x+10)$$

   Démonstration

$$\frac{d}{dx}((x^2+(2n+1)x+n^2+1)e^x) = e^x(x^2+x(2n+3)+n^2+2n+2)$$

2. Un "second regard"

   "Nous cherchons les dérivées du produit de deux fonctions u et v, avec $u=e^x$ et $v=x^2+x+1$. Toute dérivée de u est u, la dérivée première de v est $2x+1$, la dérivée seconde est 2 et les autres dérivées de v sont nulles. A partir de là, nous calculons les trois premières dérivées du produit uv. Pour généraliser, nous utilisons la formule de Leibnitz et trouvons pour tout n : $(uv)^{(n)} = uv + nuv' + \frac{n(n-1)}{2}uv''$. Nous retrouvons ainsi l'expression de la nième dérivée de $(x^2+x+1)e^x$."

Figure 3.

7.1. Una técnica "habitual" para ampliar el significado de los resultados obtenidos por la búsqueda del patrón

He aquí un primer ejemplo donde técnica 'novedosa' interviene sobre un plan local y donde una técnica "habitual" se impone para dotar de un sentido más global a los resultados los estudiantes. Es extraído de un folleto Trouche et al. (1998) donde los alumnos en una clase de Terminale (último año de educación secundaria francesa) presentan su trabajo de resolución de problemas durante el año.

Dos estudiantes explican su solución al siguiente problema: encontrar la forma de las derivadas sucesivas del producto de un polinomio de grado 2 por la función exponencial. Esta tarea se inscribe dentro de una praxeología que conducirá a considerar la derivación como una operación interna dentro del conjunto de productos de la función exponencial por polinomios de grado dado.

La técnica con un sistema de cálculo formal (Figura 3, primera parte), consiste en operar múltiples derivaciones y un reconocimiento de regularidades ("pattern"), después conjeturar una forma general. El resultado puede también ser demostrado con la ayuda del cálculo simbólico. El problema es, así, resuelto sin conocimientos sobre la derivación de un producto.

En el folleto (Figura 3, segunda parte), los alumnos declaran que esta investigación los conduce al resultado buscado, pero los deja insatisfechos. Por esta razón, producen una solución alternativa, sin utilizar el software, basada en las derivadas sucesivas de la exponencial y el polinomio, y en la fórmula de Leibnitz que generaliza la técnica de derivación de un producto de funciones.

¿Por qué estos estudiantes se plantean de nuevo un problema que ya han resuelto? ¿Qué papel juega para sus conocimientos acerca de la derivación de un producto? La praxeología local en la cual se inscribe la búsqueda de patrones no pone en relación los objetos del problema con los saberes más globales. O, dicho más ingenuamente: la resolución con cálculo simbólico "no explica" por qué la derivación conserva el conjunto de productos de la función exponencial por polinomios de grado dado. Así, regresar a una técnica de papel y lápiz ayuda a insertar la cuestión en las relaciones más globales con los objetos de análisis.

Existen otros ejemplos en análisis donde una técnica 'habitual' elaborada al principio para obtener resultados simbólicos juega después un papel organizador dentro de conocimientos más vastos. La integración por partes es considerada por algunos como anticuada en una época donde las calculadoras fácilmente dan las primitivas. Sin embargo, es una gran ayuda cuando se trata de explicar por qué el cálculo simbólico encuentra las primitivas de las funciones solamente para n impar. Las técnicas habituales en análisis juegan así un papel que rebasa en gran medida las manipulaciones de cálculo.

7.2. Una técnica nueva para generalizar y sistematizar

Un segundo ejemplo mostrará que las diferentes técnicas pueden tener funciones respectivas diferentes. Se trata de un problema de optimización con generalización, experimentado en el curso de la investigación TI-92.

Hemos retenido una situación donde se trata de optimizar las dimensiones de una cubeta (Figura 4). El espesor y el volumen interior de la cubeta son primero constantes numéricas y después, en la generalización, son constantes simbólicas.

La cuve, un problème d'optimisation avec généralisation

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de 20cm d'épaisseur et pouvant contenir 4m^3. On désigne par x (en m) le côté du carré intérieur et par h (en m) la hauteur intérieure de la cuve. On veut déterminer x et h pour que le volume de béton utilisé soit minimal.

1. Cas numérique : Exprimer le volume de béton en fonction de x seul. On notera $V(x)$ ce volume.

   Etudier le sens de variation de la fonction V. V admet-elle un minimum ? Déterminer alors les dimensions de la cuve pour lesquelles ce volume est minimal.

2. Première généralisation : Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres, le volume de la cuve étant toujours 4m^3.

3. Seconde généralisation : Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres, le volume de la cuve à réaliser étant V_0.

Figure 4.

La cubeta, un problema de optimización con generalización

Un albañil quiere construir una cubeta de concreto en forma de paralelepípedo de base cuadrada de 20 cm de espesor y capaz de contener 4m3. Se denota con x (en m) la medida del lado interior y por h (en m) la altura interior. Queremos determinar x y h para el volumen de concreto utilizado sea mínimo.

1. Caso numérico: Expresar el volumen del concreto sólo en términos de x. Se denotará con V (x) este volumen.

Estudiar el sentido de variación de la función V. ¿Admite V un mínimo? Determinar, a continuación, las dimensiones de la cubeta para las cuales ese volumen es minimal.

2. Primera generalización: Repita el mismo problema con un espesor de la cubeta de e metros, y el volumen 4m3.

3. Segunda generalización: Repita el mismo problema con un grueso de la bañera de e metros, y el volumen del tanque V_0.

En términos de conocimiento a desarrollar en los estudiantes, la generalización conduce a una reflexión sobre los resultados diferente de la del caso numérico. Por ejemplo, en el caso numérico y dentro de la primera generalización, la dimensión óptima es la misma constante numérica (4 metros). Pero este resultado tiene un significado diferente en la generalización, ya que muestra que la dimensión óptima no depende del espesor del depósito.

Nosotros esperábamos también que las generalizaciones demandadas en este problema tuvieran un efecto sobre técnicas de resolución empleadas por los alumnos. La técnica habitual para investigar la optimización sobre funciones numéricas interactúa con los registros gráficos, numéricos y simbólicos. Las exploraciones gráficas y numéricas dotan de sentido al problema, guiando el estudio simbólico pero, para muchos estudiantes, los status respectivos de los registros vis a vis la prueba no son claros.

Por ejemplo, algunos estudiantes calculan los ceros de la derivada simbólicamente, pero van a estudiar el signo de esta derivada sobre la gráfica. La generalización con una función dependiente de una constante simbólica introduce una ruptura, puesto que sólo una técnica de estudio totalmente simbólica se hace posible. Esperábamos que esta ruptura contribuyera a dar al estudio un alcance simbólico diferente al de las exploraciones gráfica y numéricas. En efecto, en situaciones habituales, los estudiantes suelen hacer el estudio del signo de la derivada solamente por factorización sólo para cumplir con el contrato didáctico, después de convencerse de las variaciones mediante lectura gráfica o numérica.

Esperábamos por supuesto que la TI-92 ayudara a la devolución de esta generalización, ya que los cálculos a mano con constantes simbólicas sería demasiado laboriosos para los estudiantes. En efecto, la expresión del volumen del depósito es. La TI-92 deriva y factoriza esta expresión en y así los alumnos pueden reconocer que la derivada es del signo del factor

Así es como los alumnos trabajaron sobre este problema. En el caso numérico, ellos encontraron las dificultades clásicas de modelar el volumen del tanque, y después emplearon diferentes estrategias para estudiar la función, combinando de manera variada las exploraciones numérico-gráficas y el estudio simbólico. En cuanto a la generalización, los estudiantes no tuvieron dificultades para el modelado.

Sin embargo, se quedaron desconcertados por la imposibilidad de obtener una representación gráfica de la función. El profesor tuvo que insistir sobre el hecho de que ellos disponían de un método con derivación. Poner en práctica este método fue para los estudiantes una verdadera reconstrucción: inseguros por la imposibilidad de explorar gráficamente la variación, se apoyaron en el cálculo simbólico para avanzar en los pasos del método.

En el ejemplo precedente, la técnica de cálculo "a mano" de las derivadas inscribió una praxeología local en el marco más global de la derivación simbólica. Así, algunas praxeologías vinculadas a la utilización de un software para la puesta en evidencia de regularidades mantienen su carácter local, si una técnica habitual no viene a ayudarlas a insertarlas en relaciones más globales.

En el segundo ejemplo, el uso de la tecnología vino a sistematizar y generalizar una técnica simbólica de estudio de las variaciones (el estudio del signo de la derivada por factorización), ahí donde los alumnos no la habían realmente percibido interesante, por falta de una tarea apropiada. Por lo tanto, las praxeologías basadas en las técnicas "habituales" están limitadas por los objetos que estas técnicas pueden manipular. El uso de la tecnología permite amplificar y sistematizar estas técnicas, dando un sentido más general a las praxeologías.

7.3. Las nuevas praxeologías: un problema para el enseñante

En esta integración de técnicas nuevas en la actividad y la reflexión del alumno, la acción del profesor es por supuesto esencial. Él tendrá que discutir con los estudiantes sobre las distintas formas de resolver un problema, focalizando no sólo los aspectos generales, sino también aquellos que están directamente relacionados con el instrumento, y apoyando la reflexión teórica sobre esos diferentes aspectos (ver Lagrange (1999b) para un ejemplo en la enseñanza de los principios del análisis).

Al dar un lugar al instrumento en la gestión cotidiana de la clase por el enseñante, esta acción participa de la "vigilancia individual y colectiva de la génesis instrumental" que Trouche (2000) subraya como una necesidad en su conclusión. No es evidente para el profesor, como lo habíamos visto en el apartado 3 sobre el estudio del uso de DERIVE en la enseñanza secundaria francesa.

El profesor también sufrirá la peor parte de la agitación que la aparición de nuevas técnicas puede producir en sus estrategias para la enseñanza. Una técnica habitual, incluso si está bien anclada en sus prácticas, no perdurará si los estudiantes tienen a su disposición un instrumento que les permita en un solo gesto efectuar la misma tarea. Ella tendrá que desplazarse, como hemos visto para la técnica de derivación de un producto, para asumir otras funciones. Si, en una enseñanza dada, una técnica marca fuertemente la praxeología subyacente, la introducción del instrumento convertirá en obsoleta la praxeología entera.

Schneider (2000) da un ejemplo notable de una situación de este tipo. En una enseñanza de las funciones logarítmicas, la resolución de ecuaciones exponenciales de diversos tipos fue la tarea central, y las técnicas se construyeron poco a poco para esa resolución, de manera que la definición y las propiedades de las funciones logarítmicas se abordaron a partir de esas técnicas. Los profesores que garantizaron esta enseñanza rápidamente se dieron cuenta que la introducción de una calculadora con cálculo formal que resuelve en un solo gesto todas las ecuaciones convierte en obsoleta toda la enseñanza.

Schneider (ibíd.) muestra el trabajo que fue necesario hacer de parte de los profesores para reconstruir una praxeología donde las técnicas gráficas, numéricas y simbólicas permitidas por la calculadora dieran un enfoque totalmente diferente de las funciones logarítmicas. Lo que es sorprendente en este ejemplo es la elaboración por los profesores de esta praxeología, sin duda un trabajo necesario para sí mismos antes de ser un producto transmisible a sus colegas bajo la forma de un plan de estudios.

En efecto, más que una organización de los contenidos matemáticos, una praxeología es un conjunto de medios disponibles para el maestro para controlar la actividad de los estudiantes y su reflexión. La creación de una nueva praxeología impone necesariamente un trabajo de parte del profesor mismo que no puede ser reducida 'a la aplicación pasiva de un curriculum llegado 'desde arriba'.

8. Conclusión y perspectivas

El punto de partida de este artículo fue el contraste entre una realidad, donde la integración de la tecnología en la enseñanza es difícil, y supone una especial atención particularmente a las relaciones que los estudiantes construyen con su instrumento, y los discursos que ponen el acento en las nuevas condiciones para la experimentación y el desarrollo de una enseñanza 'directamente conceptual' que permitiría la tecnología.

El artículo muestra que, al no analizar las condiciones bajo las cuales una verdadera experimentación se puede desarrollar, al oponer la 'comprensión' a 'las habilidades manipulativas', estos discursos ocultan una dimensión esencial de la actividad matemática: aquella de las técnicas. La enseñanza puede ser vista como la iniciación de los alumnos a las praxeologías, asociando de manera coherente las tareas, las técnicas que permiten llevarlas a cabo, y las teorizaciones que permiten comprender y dominar las técnicas.

Por lo tanto, la introducción de un instrumento tecnológico, si intenta reducir la dimensión técnica de la actividad matemática a un papel accesorio, no puede realmente contribuir a las adquisiciones conceptuales: los estudiantes se encontrarán con las trampas de la doble referencia y la experimentación ciega.

Sin embargo, la puesta en práctica de las técnicas es, junto con la instrumentación, una de las claves que permiten pensar la integración de la tecnología en la educación.

Las técnicas "nuevas" están marcadas por la inmediatez de los gestos y la producción de numerosos observables que la tecnología permite. Dentro de las técnicas "habituales" por el contrario, los gestos de papel y lápiz son laboriosos y deben economizarse. El interés de la introducción de un instrumento se puede ver en la elaboración por los alumnos de la integración de las nuevas tecnologías en praxeologías renovadas.

En el artículo hemos encontrado gran variedad de técnicas: la vinculación de los valores exactos y aproximados para vincular los fenómenos simbólicos y gráficos, la construcción progresiva de técnicas de obtención de las derivadas, la manipulación de expresiones que permiten vincular las factorizaciones generadas por la DERIVE y las factorizaciones habituales, descubrimiento y prueba de regularidades en la derivación, el método sistemático de estudio de las variaciones tal y como se aplican a las funciones paramétricas y que dotan de una significación más general a la búsqueda la optimalidad 9.

Las técnicas habituales no desaparecerán de la actividad de los alumnos. La coordinación de técnicas habituales y nuevas permite inscribir las tareas a las cuales ellas responden dentro de praxeologías que evolucionan desde lo local a lo general. No estando ya destinadas a ser rápidamente 'rutinizadas', las técnicas habituales pueden ser más fácilmente el soporte de una reflexión teórica sobre los objetos que manipulan.

Esto crea oportunidades para el desarrollo de nuevas praxeologías. Teniendo en cuenta las técnicas habituales y las nuevas es posible medir así el interés de la integración en la enseñanza de los instrumentos tecnológicos.

También muestra que esta integración no va a modificar milagrosamente las condiciones de aprendizaje. Las técnicas 'nuevas' pueden ser más fáciles y más rápidas de poner en obra que las técnicas "habituales", pero su elaboración y el trabajo de reflexión que supone el pasaje a las teorías no son menos demandantes en tiempo y esfuerzo.

Las dificultades encontradas por los profesores en la creación y aplicación de praxeologías nuevas no deben ser minimizadas. Por tanto, conviene ver la transposición didáctica de las "matemáticas experimentales" más como un problema que como una evidencia. Las matemáticas experimentales responden, en efecto, a necesidades de datos empíricos de los matemáticos, unas necesidades a priori ajenas a las preocupaciones escolares.

Ella, sin embargo, es consecuencia de banalizar los instrumentos informáticos que van a introducirse así necesariamente en la actividad matemática de los estudiantes. El uso de esos instrumentos no va a desarrollar automáticamente en los estudiantes una actividad de la misma naturaleza que aquella de los matemáticos y, por lo tanto, para la enseñanza es necesario investigar las condiciones para que su introducción sea realmente productiva.

El acercamiento por las técnicas, desarrollado en este artículo, es una forma de investigar esas condiciones. Demuestra cuál trabajo nuevo se demanda al enseñante y a la institución escolar.

Reconocimientos

Los experimentos del programa DERIVE y la calculadora TI-92 se realizaron gracias al apoyo del Ministerio Francés de Educación Nacional, DISTEN B2.

NOTAS

1. Uso 'gesto' ('gesture', en Inglés) en el sentido etimológico de acción con propósito. Los gestos en un software toman con frecuencia la forma de la emisión de un comando, mientras que los gestos "no tecnológicos" utilizan el papel y el lápiz. Estoy interesado en la finalidad dentro de la que el gesto se inscribe y en la reflexión que la apoya, más que en el comando o la acción de papel y lápiz.

2. Para un análisis más completo de esta situación, vea Lagrange (2000), p. 37.

3. "En las clases de liceo la escuela secundaria, el uso de calculadoras tienen por objetivo, no únicamente realizar cálculos, sino también (...) el alimentar el trabajo de investigación (...)" Programa de segundo.

4. El término "skill" se traduce en francés también a la vez como "competencia" y como "habilidad". Emplear "habilidad" precedido de un artículo indefinido no es muy común en francés. Por esta razón, 'a skill' es a menudo traducido por 'una competencia'. No me parece, sin embargo, juicioso en este contexto traducir 'skill' como 'competencia', pues una competencia implica un cierto grado de conocimiento de un dominio y por lo tanto no se opone a una "comprensión" de ese dominio.

5. Los vínculos a una noción de análisis, "enactivo", "manipulativo" y "formal" son descritos por Tall (1996). Yo no traduzco los dos primeros términos, porque no tienen correspondientes directos en francés. La relación "enactiva" con los fenómenos funcionales (dependencia, límites,...) o diferenciales (incrementos, extremos,...) se sitúa en el nivel de los conocimientos cotidianos o construidos previamente. La relación (rapport) 'manipulativa' es el que el análisis del liceo busca establecer. Pone en juego el funcionamiento de los objetos, mientras que la relación "formal" que los estudiantes encuentran verdaderamente al ingresar a la universidad pone el acento su definición y su status teórico.

6. Chevallard (ibíd.) distingue dos niveles por encima de las técnicas, el nivel de la «tecnología» y este de las teorías que son "tecnologías de la tecnología". En el análisis de Chevallard, "tecnología" tiene el significado etimológico de discurso sobre las técnicas, un sentido de bien diferente de aquéllos bajo los cuales yo uso ese término en el artículo.

7. Véase también Gascón (1998, p. 23) "Modelo del proceso de estudio de una obra matemática'.

8. Las técnicas están relacionadas con los instrumentos utilizados, y así se podría hablar de "técnicas de utilización de un software" y de "técnicas de papel y lápiz". Pero, más que el instrumento mismo, el que marca una técnica, es la naturaleza

de los gestos que lo componen y la reflexión que ellos implican. Es por eso que yo considero las técnicas "nuevas" marcadas por la inmediatez de los gestos y la reflexión sobre los numerosos observables, y las técnicas 'habituales' donde los gestos son laboriosos y deben ser "economizados" en la resolución. El adjetivo "habitual", por supuesto, puede ser entendido como "relativo a los hábitos", es decir, a la manera de ser de un individuo en un entorno social dado. Las técnicas de papel y lápiz forman parte de los hábitos de las personas formados en las matemáticas (matemáticos, profesores, padres...) mientras que las técnicas permitidas por la informática seguirá siendo marginal en el largo plazo.

9. Lagrange (1999a, p. 66) también muestra cuáles tareas pueden permitir a los estudiantes desarrollar las técnicas de transformación de expresiones algebraicas usando de manera reflexiva las funcionalidades algebraicas de una calculadora con cálculo formal de manera que el papel que pueden jugar esas técnicas en la comprensión de las relaciones entre las diferentes formas de una expresión.

Bibliografía

Artigue, M.: 1997, 'Le logiciel DERIVE comme révélateur de phenomenes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour 1'apprentissage', Educational Studies in Mathematics 33(2), 133-169.

Artigue, M. et Lagrange, J.B.: 1999, 'Instrumentation et ecologie didactique de cal- culatrices complexes: elements d'analyse a partir d'une experimentation en classe de Premi&e S', in Guin, D. (ed.), Actes du Congres 'Calculatrices symboliques et Geometriques dans 1'enseignement des mathimatiques' , Mai 1998, IREM de Mont- pellier, pp. 15-38.

Borwein, J., Borwein, P., Girgensohn, R. et Parnes, S.: 1996, 'Making sense of ex perimental Mathematics', The Mathematical Intelligencer 18(4), Springer, New York, 12-17.

Chevallard, Y.: 1999, 'L'analyse des pratiques enseignantes en theorie anthropologique du didactique', Recherches en Didactique des Mathimatiques 19(2), 221-266.

Chevallard, Y.: 1985, La Transposition Didactique, Editions La Pensee Sauvage, Grenoble.

Davenport, J., Siret, Y. et Toumier, E.: 1986, Calcul Formel. Masson.

Douady, R.: 1986, 'Jeux de cadres et dialectique outil / objet', Recherches en Didactique des Mathimatiques 7(2), 5-31.

Duval, R.: 1996, 'Quel cognitif retenir en didactique?', Recherches en Didactique des Mathimatiques 16(3), 349-382.

Fey, J.: 1989, 'Technology and mathematics education, a survey of recent developments and important problems', Educational Studies in Mathematics 20, 237-272.

Gascon, J.: 1998, 'Evolucion de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica', Recherches en Didactique des Mathimatiques 18(1), 7-33.

Guin, D. et Delgoulet, J.: 1996, 'Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de Seconde', IREM de Montpellier.

Guin, D. et Trouche, L.: 1999a, 'The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators', The International Journal of Computers in Mathematics Education 3(3).

Heid, M.K.: 1988, 'Resequencing skills and concepts in applied calculus', Journal for Research in Mathematics Education 19(1), 3-25.

Juge, G. (ed.): 1994, 'Les outils de calcul formel dans l'enseignement des Mathematiques', Actes de l 'Universite d'te,& IREM de basse Normandie.

Kieran, C. et Wagner, S.: 1989, 'The research agenda conference on algebra: background and issues', in Kieran et Wagner (eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM-LEA, pp. 1-10.

Lagrange, J.B.: 1996, 'Analysing actual use of a computer algebra system in the teaching and learning of mathematics', International DERIVE Journal 3(3), 91-108.

Lagrange, J.B.: 1999a, 'Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: a two year classroom experiment with the TI-92', International Journal for Computer Algebra in Mathematics Education 6(2), 143-165.

Lagrange, J.B.: 1999b, 'Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus', International Journal of Computers for Mathematical Learning 4(1), 51-81.

Lagrange, J.B.: 2000, Approches Didactique et Cognitive d'un Instrument Technologique dans l'Enseignement Le Cas du Calcul Formel en Lycee, Document pour l'Habilitation a Diriger les Recherches, Universite Paris VII.

Mercier, A.: 1996, 'L'algebrique, une dimension fondatrice des pratiques mathematiques scolaires', in R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian (eds.), Actes de la

8eme Ecole de't de Didactique des Mathematiques. IREM Clermont Ferrand, pp. 345-361.

Monaghan, J., Sun, S. et Tall, D.: 1994, 'Construction of the limit concept with a computer algebra system', in Proceedings of the 8th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, University of Lisbon, Portugal, Vol. III, pp. 279-286.

Mounier, G. et Aldon, G.: 1996, 'A problem story: factorisations of xn-l', International DERIVE Journal 3(3), 51-61.

Pérez Fernández, J.: 1998, 'Los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas', in B. Hodgson et al. (eds.), Selected Lectures of the 8th International Congress on Mathematical Education, SAEM THALES, pp. 345-368.

Pozzi, S.: 1994, 'Algebraic reasoning and CAS: Freeing students from syntax?', in H. Heugl and B. Kutzler (eds.), DERIVE in Education, Chartwell-Bratt, Bromley.

Rachlin, S.: 1989, 'The research agenda in algebra: a curriculum development perspective', in Kieran and Wagner (eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM-LEA, 257-265.

Schneider, E.: 2000, 'Teacher experiences with the use of a CAS in a mathematics classroom', International Journalfor Computer Algebra in Mathematics Education 7(2), 119-14.

Tall, D.: 1996, 'Functions and calculus', in A.J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic, pp. 289-325.

Trouche, L.: 2000, 'La parabole du gaucher et la casserole a bec verseur: etude des pro- cessus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes', Educational Studies in Mathematics 41, 239-264.

Trouche, L. et al.: 1998, Faire des Mathematiques au lycee avec des calculatrices symboliques, IREM Montpellier.

Wain, G.: 1994, 'Some technical problems in the use of DERIVE with school pupils', International DERIVE Journal, 1(1), 49-56.

Institut universitaire de formation des maîtres 153,

rue de St Malo 35043 Rennes Cedex France,

E-mail: lagrange @ univ-rennesl.fr,

Tel/Fax: 33 2 99 64 84 12

Institut universitaire deformation des maUtres 153,

rue de St Malo 35043 Rennes Cedex France,

E-mail: lagrange @ univ-rennesl.fr,

Tel/Fax: 33 2 99 64 84 12