30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Jornada 1

Fecha de entrega: 23 de julio de 2016

Equipos

Equipo Estrella de Koch: Roberto, José Antonio, Brandon del Ángel, Zafiro.

Equipo Curva del dragón: Abraham, Carlos Alberto, Nayeli, Brandon Antonio.

Equipo Alfombra de Sierpinski: Patricia, Luis Reyes, Carlos Enrique, David.

Equipo Conjunto de Mandelbrot: Diego, Carlos Gamiño, Max, Juan Pablo.

Equipo Fractal de Apolonio: Axel, Gerardo, Jesús Anaya, Yazmín.

Equipo Esponja de Menger: Julieta, Abigail Chávez, Jorge Cortés, Omar.

Equipo Curva de Gosper: César, Belem Abigail, Domingo, Salvador.

Equipo Árbol de Pitágoras: Erick, Alejandro, Juan José, Andrés, Isis.

Equipo Conejo de Douady: Daniel, Jessica (Invitados).

Teoremas y Resultados Bonus

Factorización de diferencia de cuadrados, Teorema de Tales, Residuos o Congruencias, Principio de Casillas. Fórmula de Herón.

Problemas Anclados

Por ser la primera semana, no habrá problemas anclados a nadie, solo el G4 está bloqueado para David (no puede hacerlo él para su equipo).

Lista de Problemas

Área: Teoría de Números

Problema N1. Encuentra todos los números de tres dígitos tal que la suma de los factoriales de los tres dígitos por los que está formado el número, sea igual al número.

Problema N2. Sean a, b y c tres dígitos distintos, con $a \neq 0$. Considera los números de seis dígitos $N = abcabc$ y $M = abccba$.

a) Demuestra que N y M no pueden ser primos relativos.

b) Encuentra a, b y c para que $mcd(N, M) = 495$.

Problema N3. Determina todos los enteros a para los cuales $a + 1$ y $a^2 + 1$ son ambos potencias de dos.

Problema N4. Encontrar todos los enteros n menores a 100 tales que $n + 2$, $n + 4$, $n + 8$ y $n + 16$ sean números primos.

Área: Combinatoria

Problema C1. Sea A un conjunto de números naturales menores que 1000. Ninguno de ellos es cuadrado perfecto, pero el producto de dos cualesquiera de los elementos de A es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el mayor número de elementos que puede tener A?

Problema C2. ¿De cuántas maneras podemos tomar tres fichas de dominó de tal forma que entre las tres aparezcan por lo menos cinco números distintos?.

Problema C3. Dadas 9 personas, demuestre que existe un valor de n tal que con las personas se puede formar n grupos de a 3, de modo que cada par de personas se encuentran en exactamente uno de dichos grupos. Si el mismo número de grupos debe formarse, pero de 6 personas cada uno y con la condición de que cada par se encuentre en exactamente k grupos, determine si existe un valor de k que hace posible que el problema tenga solución.

Problema C4. Un triángulo equilátero de lado 3 se divide mediante líneas paralelas a los lados en 9 triangulitos equiláteros de lado 1. Dos triangulitos se dicen adyacentes si tienen un lado común. Escribe los números del 1 al 9, uno en cada triangulito, de manera que cada número sea divisible entre el número de triangulitos adyacentes al que ocupa. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer esto?

Área: Álgebra

Problema A1. Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} x+y+z=2 \\ x^2-y^2-z^2=2 \\ x-3y^2+z=0. \end{gathered}$$

Problema A2. Dados dos triángulos isósceles de lados x, x , 3 y x, x, 4 que tienen la misma área ¿Cuál es el valor de x?

Problema A3. Sean x, y y z tres números reales positivos diferentes entre sí. Si

$$\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$$

¿cuánto vale $\frac{x}{y}$?

Problema A4. Simplifica la expresión

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+99\cdot 99!.$$

Área: Geometría

Problema G1. Sea ABC un triángulo y D, E y F puntos sobre el lado BA tales que CD es altura, CE es bisectriz de $\angle ACD$ y CF es bisectriz de $\angle DCB$. Demuestra que si el incentro de $\triangle ABC$ coincide con el circuncentro de $\triangle ECF$, entonces $\angle BCA=90°$

Problema G2. En el rectángulo $ABCD$ sea P el punto medio de AB y sea Q un punto sobre el segmento PD tal que $\angle CQD=90°$. Demuestra que BCQ es un triángulo isósceles.

Problema G3. Considera la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC (con $AC=BC$. En el arco BC, opuesto al punto A, se elige un punto D. Sea E un punto en AD tal que CE y AD son perpendiculares. Demuestra que $AE=BD+DE$.

Problema G4. Sea E un punto sobre el lado AC del triángulo ABC. Por el vértice B tracemos una recta arbitraria ℓ. Por E, se traza una recta paralela a BC la cual corta a ℓ en el punto N. También por E, se traza una recta paralela a AB la cual corta ℓ en el punto M. Demuestra que AN es paralelo a CM.