30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Jornada 3

Fecha de entrega: 6 de agosto de 2016

Equipos

Conjetura de Brocard: Luis Reyes, Carlos Alberto, Max, Axel.

Conjetura de Gilbreath: Carlos Enrique, Carlos Gamiño, Patty, Andrés.

Problema del sofá: Belem Abigail, Brandon del Ángel, José Antonio, Jesús Anaya.

Conjetura de los primos gemelos: Diego, Isis, Juan José, Julieta.

Conjetura de Goldbach: César, Jorge Cortés, Erick, Domingo.

Conjetura del 196: Zafiro, Abigail Chávez, David, Nayeli.

Conjetura de Legendre: Roberto, Gerardo, Juan Pablo, Brandon Antonio.

Conjetura de Collatz: Salvador, Alejandro, Yazmín, Omar.

Conjetura de los números perfectos: Daniel, Jessica, Cristian, Carlos (Invitados).

Teoremas y Resultados Bonus

Potencia de un Punto. Cambio de variable. Suma de Gauss. Principio de Casillas. Principio de Inclusión y Exclusión. Criterios para decidir cíclicos.

Problemas Anclados y Bloqueados

G4 está anclado para Carlos Gamiño, Jorge Cortés, Zafiro. C2 anclado para Axel, Gerardo, Jesús Anaya y Yazmín. N1 anclado a Salvador, Diego y Juan Pablo.

Lista de Problemas

Área: Teoría de Números

Problema N1. Sea n un entero mayor o igual a 10. A n se le quita el dígito de las unidades y se obtiene un número m. Encuentra todos los n tales que m divide a n.

Problema N2. Un número natural de n dígitos es *armonioso* si sus n dígitos son una permutación de $1, 2, 3, \dots, n$ y sus primeros k dígitos forman un número divisible por k, para $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Por ejemplo, 321 es armonioso pues 3 es divisible por 1, 32 es divisible por 2 y 321 es divisible por 3. Encuentra todos los números armoniosos de 6 dígitos.

Problema N3. Encuentra todos los números de tres dígitos que se incrementan en 75 % al invertir sus dígitos.

Problema N4. Dado un número de 3 cifras abc se calculan los residuos de las divisiones $abc \div bc$ y $bc \div c$. Encuentra todos los números que producen residuos 1 y 5 (en ese orden).

Área: Combinatoria

Problema C1. Consideremos tres casas: A, B y C. Al inicio de la semana, cada casa tiene 10 gatos que son de ahí. Durante una noche sale un gato de cada casa a pasear, y al teminar la noche a cada casa llega uno de los gatos, pero ya no necesariamente de esa casa. Después de 7 noches, denotamos por $d(i, j)$ al número de gatos que están en la casa i pero son de la casa j, por ejemplo, $d(B, C) = 2$ quiere decir que tras la séptima noche hay 2 gatos en la casa B que pertenecen a la casa C. Demuestra que alguna de las sumas $d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$ o $d(A, C) + d(C, B) + d(B, A)$ es menor o igual a 10.

Problema C2. En una mesa redonda están sentados 2009 pitufos, cada uno con un número escrito en el gorro. Pitufo Matemático se dió cuenta que para cada par de pitufos sentados en lugares vecinos el número del gorro de uno de esos pitufos divide al número del gorro del otro. Demuestra que hay dos pitufos no vecinos con los que pasa lo mismo, es decir, el número del gorro de uno, divide al número del gorro del otro.

Problema C3. Considera un tablero cuadrículado de manera regular con área N. Al colocar un triángulo no degenerado dentro de él (o en los bordes) decimos que es *tranquilo*, si cada vértice coincide coincide con algún vértice de los cuadritos unitarios interiores, además si uno de sus lados es paralelo a algún lado del tablero. Supón que se han colocado $N + 1$ triángulos *tranquilos*, muestra que hay dos con la misma área.

Problema C4. Sea n un entero positivo. Demuestra que el número de soluciones enteras positivas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$ es

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

Área: Álgebra

Problema A1. Sean a, b y c números tales que $0 < a, b, c \leq 1$. Prueba que

$$\frac{1}{2+3a} + \frac{2}{2+3b} + \frac{3}{2+3c} \geq \frac{6}{5}.$$

Problema A2. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (x+y)(x+z) &= 30 \\ (y+z)(y+x) &= 15 \\ (z+x)(z+y) &= 18. \end{aligned}$$

Problema A3. Muestra que m^3 se puede representar como la suma de m números impares consecutivos, para todo m entero.

Problema A4. Encuentra todos los enteros positivos n para los cuáles entre los números $n, n+1, n+2, \ldots, n^2$ existen cuatro números distintos, digamos a, b, c y d tales que $ab = cd$.

Área: Geometría

Problema G1. En un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B, M es el punto medio de AC. La perpendicular a AC por M corta a BC en D y la paralela a AB por M corta a BC en E. La circunferencia que pasa por A, D y E corta de nuevo a AC en L. Muestra que $\frac{CL}{LA} = \frac{1}{3}$.

Problema G2. Sea ABC un triángulo con AD la altura sobre BC. La circunferencia de centro D y radio AD corta a AB en P y a AC en Q. Demuestra que los triángulos ABC y AQP son semejantes.

Problema G3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $AB = DC$ y $\angle ABD$, $\angle BDC$ son suplementarios, considera un punto E en el segmento AD tal que $DE = EB$, finalmente sea F un punto en EB tal que el ángulo que forman los segmentos FC y EB sea recto. Muestra que $AB = DF$.

Problema G4. En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de AD, una recta perpendicular a CM por M corta a AB en K. Demuestra que $\angle DCM = \angle KCM$.