30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Jornada 5

Fecha de entrega: 22 de agosto de 2016

Equipos

Los diferenciables: Salvador, Jesús Anaya, José Antonio, Carlos Gamiño.

Los continuos: Juan José, Max, Nayeli, David.

Los trigonométricos: Brandon Antonio, Zafiro, Luis Reyes, Roberto.

Los meromorfos: César, Omar, Isis, Diego.

Los vectoriales: Alejandro, Julieta, Gerardo, Domingo.

Los suprayectivos: Abigail Chávez, Jorge Cortés, Axel, Juan Pablo.

Los logarítimos: Andrés, Patty, Carlos Delgado, Abigail Miranda.

Los trascendentes: Carlos Enrique, Yazmín, Erick, Brandon del Ángel.

Los exponenciales: Daniel, Yessica, Cristian, Carlos, Karla (Invitados).

Teoremas y Resultados Bonus

Triángulo que abre un diámetro es rectángulo. Binomio al cubo. Criterio de divisibilidad del 11. Conteo por Complemento. Fórmula General para Ecuaciones de Segundo Grado. Teorema de Tales.

Problemas Anclados y Bloqueados

G1 bloqueado a Jesús, Roberto y Patty. N3 bloqueado a David, Jesús, Julieta. G4 bloqueado a Jesús Anaya.

A4 anclado a David, Jesús y Carlos Delgado. C3 anclado a Patty, Julieta y Luis Reyes. C4 anclado a Abigail Miranda, Alejandro, Gerardo y Axel. N3 anclado a Domingo, Carlos Gamiño. A2 anclado a Nayeli, Jorge Cortés y Erick.

Lista de Problemas

Área: Teoría de Números

Problema N1. Dado un entero n de tres cifras con las decenas menor a 7, designamos por $f(n)$ el número que se obtiene al sumarle 30 a n y después invertir sus cifras. $f(618) = 846$. Encuentra todos los n tal es que $f(n) = 4n$.

Problema N2. Considera los enteros positivos a, n, x, y mayores a dos que cumplen $2^n + 1 = xy$ y $2|x - 1$, demuestra que $2^a|y - 1$.

Problema N3. Considere la sucesión $1, 9, 3, 4, 3, \ldots$, en la cual a_{n+4} es el digito de la unidades de $a_n + a_{n+3}$, para n entero positivo. Demuestre que:

$$a_{1985}^2 + a_{1986}^2 + \ldots\ldots. a_{2000}^2$$

es un múltiplo de 2.

Problema N4. Encuentra todos los números de tres dígitos tales que al dividirlos por 11 se obtiene la suma de los cuadrados de los dígitos del número inicial.

Área: Combinatoria

Problema C1. ¿De cuántas maneras puedes colocar piezas de 2×1 o 1×2 en un tablero de 15×2?

Problema C2. Considera un cubo con una mosca en cada uno de sus vértices. Cuando un silbato suena, cada mosca se mueve a un vértice que este en la misma cara en la que estaba pero diagonalmente opuesto al vértice original. Después de que el silbato suena ¿De cuántas maneras pueden las moscas cambiar de posición de manera que no haya dos o más moscas en el mismo vértice?

Problema C3. Una línea recta se pinta de dos colores. Demuestra que hay tres puntos A, B y C del mismo color tales que $AB = BC$.

Problema C4. 12 participantes de la Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas (6 hombres y 6 mujeres), se organizan para jugar futbol. Van a formar 3 equipos de 4 jugadores. Si una de las reglas es que no haya equipos con miembros todos del mismo género, ¿de cuántas formas se pueden hacer los equipos?

Área: Álgebra

Problema A1. Para un número natural n considera los números $n^2, n^2+1, \dots, (n+1)^2$. Muestra que existen tres, digamos a, b, c, tal que a^2+b^2 es múltiplo de c.

Problema A2. Una fracción se dice *humilde* si es de la forma $\frac{n^3-1}{n^3+1}$ para algún entero positivo n mayor a 1. Demuestra que el producto de las primeras 2016 fracciones *humildes* es mayor a $\frac{2}{3}$.

Problema A3.

a) Encuentra todos los enteros positivos k para los cuáles es posible elegir enteros a y b mayores que k de manera que $a-k$, $b-k$ y $ab-k$ sean cuadrados perfectos.

b) Encuentra todos los enteros positivos k para los cuales es posible elegir enteros a y b mayores que k de manera que $a-k$, $b-k$ y $a+b-k$ sean cuadrados perfectos.

Problema A4. Demuestra que todos los números de la sucesión

$$\frac{107811}{3}, \frac{110778111}{3}, \frac{111077781111}{3}, \dots$$

son cubos perfectos.

Área: Geometría

Problema G1. En un triángulo ABC con $2AB = AC$, la bisectriz exterior al ángulo en A corta a la circunferencia de diámetro AC en D. Demuestra que $BD = BC$.

Problema G2. Sea $ABCD$ un trapezoide con bases AB y CD inscrito en un circunferencia de centro O. Llamemos P a la intersección de las rectas BC y AD. Un círculo que pasa por O y P intersecta a los segmentos BC y AD en los puntos F y G respectivamente. Demuestra que $BF = DG$.

Problema G3. Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea M un punto sobre el segmento AC. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y C a la línea BM, respectivamente. Demuestra que $BP = PQ + QC$.

Problema G4. Sea $ABCD$ un rectángulo y P un punto en su circuncirculo, PC intersecta a AB en R y PA intersecta a DC en Q. Sean A' y R' los ortocentros de los triángulos AQC y ARC. Mostrar que los triángulos $R'AC$ y $QA'C$ son semejantes.