JEAN-BAPTISTE LAGRANGE

L'INTÉGRATION D'INSTRUMENTS INFORMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT: UNE APPROCHE PAR LES TECHNIQUES

RESUME. L'utilisation banalisée de facilités graphiques et symboliques sur ordinateur ou sur calculatrice dans l'enseignement de l'algèbre et de l'analyse sera très bientôt une réalité. Cette situation conduit à réexaminer deux thèmes très présents dans les discours et expérimentations sur l'introduction de ces instruments : la tension ancienne entre 'les habiletés manipulatoires' et 'la compréhension des concepts' et l'influence récente d'un courant de 'mathématiques expérimentales' dans la recherche en mathématiques. Cet article vise à montrer que ces deux thèmes occultent une réalité essentielle, celle de l'existence d'une dimension technique dans l'activité mathématique et de son rôle irremplaçable comme niveau intermédiaire entre les tâches et les théorisations. En s'appuyant sur des recherches sur l'introduction de logiciels ou calculatrices 'à calcul formel', l'article propose de considérer des 'techniques nouvelles' associées aux instruments technologiques, leur rôle dans les conceptualisations et leur articulation avec les 'techniques habituelles'. Pour l'enseignant, l'introduction de ces instruments va imposer un travail de conception de praxéologies adaptées, ainsi qu'une action quotidienne sur les techniques instrumentées.

ABSTRACT. The use of graphical and symbolic facilities in the teaching and learning of algebra and calculus will soon be a reality. Authors who write about the introduction of these instruments often claim that new technology is able to redress the imbalance between skill-dominated conceptions of school mathematics in favour of understanding. More recently some have stressed that 'experimental mathematics' traditionally the reserve of mathematical research may be incorporated into the teaching and learning of mathematics. This paper looks into these two ideas and shows that they conceal an essential dimension: techniques play an important role in mathematical activity, intermediate between tasks and theories. This paper draws on research studies on the introduction of symbolic systems on computers and calculators and considers 'new' techniques that accompany new technological instruments, their role in conceptualising and their links with 'usual' paper/pencil techniques, as a key to analyse the role of technology in education. This view implies non obvious tasks for the teacher in the introduction of technology: the design of praxeologies adapted to new instrumental settings and everyday action on students' techniques.

KEY WORDS: experimental mathematics, instruments, praxeology, techniques, technology, understanding

1. INTRODUCTION

La banalisation des calculatrices graphiques dans l'enseignement secondaire des mathématiques est une réalité depuis plusieurs années. Ce phénomène

Educational Studies in Mathematics **43:** 1–30, 2000.

a été préparé par les discours insistant sur les apports de la 'visualisation' aux conceptualisations mathématiques. En contrepoint à ces discours, des recherches didactiques, notamment françaises (Guin et Trouche, 1999), ont montré que l'actualisation des potentialités de ces 'instruments' est problématique, en insistant sur l'interdépendance des processus 'd'instrumentation' et de conceptualisation.

Aujourd'hui, l'apparition dans les mains des élèves de fonctionnalités symboliques sur des calculatrices 'complexes' ou sur des logiciels 'de calcul formel' est d'actualité. Plus encore que les calculatrices graphiques, la présence de ces outils dans la pratique mathématique quotidienne des élèves impose à l'enseignement de considérer une 'genèse instrumentale' où les schèmes d'usage se développent conjointement avec des connaissances proprement mathématiques. Etudiant la mise en place de projets d'enseignement de l'analyse dans les deux dernières années du secondaire en France, Lagrange (1999b), Trouche (2000) montrent combien, chez l'élève, les schèmes d'usage de l'instrument influencent les conceptualisations et quelle attention l'enseignement doit apporter à leur développement.

Parallèlement, les discours dominants sur l'introduction des technologies insistent sur le caractère a priori positif de cette introduction. L'usage de la technologie aurait pour effet d'améliorer ce qui est considéré comme la part 'noble' de l'activité mathématique – la compréhension, l'étude en profondeur des concepts – en diminuant la part 'routinière' que constituent les manipulations techniques. Ainsi, les changements dans l'enseignement des mathématiques s'inscriraient dans une 'révolution technologique' (Pérez Fernàndez, 1998, p. 347) où l'ordinateur permettrait un enseignement 'expérimental' des mathématiques (ibid, p. 346). Il existe donc un contraste entre une réalité où l'effet de la calculatrice ou de l'ordinateur doit, à chaque instant de l'enseignement, être analysé sans a priori positif, et des discours où la technologie conduirait 'logiquement' à des changements qualitatifs dans l'enseignement. Ce contraste impose de réexaminer les bases sur lesquelles reposent ces discours en étudiant les questions suivantes :

- D'où vient l'idée de 'mathématiques expérimentales' ? Quel rôle la technologie joue-t-elle dans leur développement ? Quels problèmes pose leur transposition à l'enseignement ?
- Comment l'utilisation de la technologie modifie-t-elle l'accès des élèves aux concepts ? Quels nouveaux rapports existent entre la compréhension des concepts et la part plus technique du travail mathématique ?

Je vais étudier ces deux questions en m'appuyant sur le bilan de six années d'expérimentation de systèmes de calcul symbolique dans l'enseignement secondaire français, d'abord sur le logiciel DERIVE (Lagrange, 1996; Artigue, 1997) puis sur la calculatrice 'complexe' TI-92 (Lagrange, 1999a; Lagrange, 1999b; Guin et Trouche, ibid.).

Les logiciels de calcul symbolique constituent en effet les instruments technologiques les plus récemment disponibles et ceux qui, dans les discours, sont crédités des plus riches potentialités. De plus, ce cadre expérimental est particulièrement adapté à une confrontation entre les discours sur les potentialités de la technologie et la réalité des classes. Il s'agissait en effet d'enseignements longs (une année scolaire) sur un curriculum national: il fallait développer, dans des classes équipées de logiciels puis de calculatrices, des aptitudes mathématiques comparables à celles des élèves d'autres classes, en exploitant les potentialités de ces systèmes tout en déjouant les pièges d'une utilisation non raisonnée de la technologie.

Je vais donc brièvement présenter les caractéristiques des systèmes de calcul symbolique qui sont apparues pertinentes pour l'analyse de leur utilisation dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Ensuite, en fonction de ces caractéristiques et des résultats des expérimentations, j'étudierai les deux thèmes des mathématiques expérimentales et de la possibilité d'un enseignement privilégiant les concepts. A partir de cette étude, je montrerai l'impossibilité de concevoir ou d'analyser un enseignement avec systèmes de calcul symbolique sans prendre en compte les techniques nouvelles et habituelles qui interagissent désormais dans l'activité mathématique des élèves et les perspectives ouvertes par cette prise en compte.

2. Les systèmes de calcul symbolique

La disponibilité de fonctionnalités de calcul symbolique dans des logiciels tels que Macsygma, Maple, Mathematica, DERIVE et sur des calculatrices est bien connue. En France, le terme 'calcul formel' est utilisé pour nommer à la fois le domaine de recherche qui vise à créer et à évaluer des algorithmes de traitement des expressions mathématiques (Davenport et al., 1986) et le travail d'innovation mené dans l'enseignement autour de l'introduction de logiciels implémentant ces algorithmes (Juge, 1994). Dans la littérature anglo-saxonne, les logiciels, notamment ceux proposés aux élèves, sont désignés par 'Computer Algebra Systems'.

De cet échantillon des terminologies employées, nous retiendrons la filiation qui relie les logiciels utilisables dans l'enseignement et un domaine de recherche à la frontière des mathématiques et de l'informatique.

Nous retiendrons aussi l'idée de 'Système' : les fonctionnalités de calcul symbolique n'existent pas seules, elles sont proposées dans un environnement logiciel 'dédié aux mathématiques' avec notamment des facilités graphiques et numériques. Ces systèmes présentent deux caractéristiques affectant l'activité mathématique dans les situations scolaires d'utilisation: l'immédiateté des gestes, et le phénomène de double référence.

Un système de calcul symbolique permet à son utilisateur de pratiquer des 'gestes'[1] qui existent aussi, mais différemment, dans la pratique 'habituelle'. Un 'geste', c'est par exemple, calculer une limite, obtenir la dérivée d'une fonction donnée. Le 'système' comporte des facilités graphiques qui permettent aussi des gestes tels que l'obtention du graphe d'une fonction dans une fenêtre donnée, les différents zooms, le repérage d'un point caractéristique sur le graphe ou sur une table de valeurs ... La caractéristique principale des gestes permis par la technologie est l'immédiateté : si le système donne un résultat, l'utilisateur l'obtient sans délai après l'émission de la commande. Cette immédiateté existe peu dans la pratique habituelle. Un calcul de limite 'à la main', va par exemple demander du temps, des efforts, l'appel à des images mentales, à des stratégies de vérification. Nous opposerons donc 'l'immédiateté' des gestes technologiques au caractère 'laborieux' des gestes habituels.

Ainsi, les systèmes de calcul symbolique permettent des gestes multiples, souvent rapides et économes en réflexion. Grâce à cela, dans les observations de situations de résolution au cours des expérimentations de DERIVE, nous avons vu les élèves rester actifs face à des difficultés qui dans la pratique habituelle les auraient placés en situation de blocage. Dans certains cas, cette activité pouvait produire des observables nombreux, une véritable activité expérimentale. Dans d'autres cas, le coût faible des actions et du changement d'action favorisait les comportements de 'pêche' finalisés, mais peu organisés, ou même de simple collecte des résultats. Je discuterai plus loin les conditions dans lesquelles une véritable activité expérimentale peut se développer.

L'utilisation d'un système de calcul symbolique place aussi l'utilisateur dans une 'double référence' (Artigue, 1997, p. 152) d'une part à des significations mathématiques et d'autre part à des significations plus spécifiques des contraintes d'un système informatique. En effet, l'utilisation d'un tel système ne se fait pas pour elle-même : les significations en jeu, particulièrement dans les situations d'apprentissage, sont les significations mathématiques habituelles. Le système est donc conçu pour que ses réponses puissent s'interpréter selon ces significations, mais par ailleurs, il fonctionne selon les contraintes d'un système automatique ayant une logique conforme seulement en apparence aux usages mathématiques.

Donnons un exemple, celui d'élèves devant transformer en produit l'expression trigonométrique $sin(x) + sin(2x)$ à l'aide de DERIVE. Ils avaient à leur disposition une fonction programmée qui leur donnait l'expression: $sin\ (\frac{2x+x}{2})cos(\frac{2x-x}{2})$. Ils voulaient simplifier ensuite cette expression en $sin\ (\frac{3x}{2})cos(\frac{x}{2})$. Dans DERIVE, les simplifications trigonométriques opèrent sur l'ensemble de l'expression et les essais des élèves leur ont donné soit l'expression initiale, soit une autre expression sans intérêt pour le problème: $sin(x) + 2sin(x)cos(x)$. Les élèves ne pouvaient comprendre que la simplification en $sin\ (\frac{3x}{2})cos(\frac{x}{2})$ – immédiate en papier/crayon – ne pouvait être produite directement par DERIVE. Ils imaginaient que DERIVE fonctionnait selon la logique mathématique habituelle, sans conscience des algorithmes de simplification à l'œuvre[2].

Ainsi, l'interaction avec un système de calcul symbolique fonctionne sous une 'double référence' d'une part aux significations mathématiques 'habituelles' et d'autre part à la logique algorithmique du système. Dans les premières situations observées, notamment celle rapportée ci-dessus, et la situation des factorisations Artigue (1997) sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 5, l'intervention de références à cette logique algorithmique du calcul symbolique, non anticipée par le professeur, produisait un effet négatif sur les situations: les élèves ne parvenaient pas à se situer dans les significations mathématiques attendues par le professeur et tentaient sans succès d'interpréter le fonctionnement de DERIVE en multipliant les actions avec le logiciel.

Par la suite, ce phénomène a pu être mieux compris, et ainsi mieux anticipé par les professeurs ayant participé aux expérimentations. Des conditions plus favorables, que nous allons étudier dans la suite, ont donc permis de rendre productive la 'double référence'.

3. Les mathématiques expérimentales

Nous avons vu ci-dessus que l'immédiateté des gestes dans les systèmes de calcul symbolique permet à l'élève d'être actif, mais ne garantit pas la productivité mathématique qui donnerait à cette activité un réel caractère 'expérimental'. Il en est de même de la 'double référence' qui, si l'élève ne la maîtrise pas, l'empêche de donner une dimension mathématique à sa réflexion sur les observables. Ceci relativise les discours selon lesquels un nouvel enseignement 'expérimental' des mathématiques serait à l'ordre du jour. Je vais analyser cette distance entre les discours et la réalité comme une tentative de 'transposition didactique' (Chevallard, 1985) encore mal maîtrisée.

La recherche en mathématiques a toujours comporté une dimension expérimentale. Ce qui est nouveau, avec les progrès de l'informatique, c'est que cette dimension tend à sortir du travail privé du mathématicien pour prendre un caractère officiel. Les conjectures produites à l'aide de programmes d'ordinateur, les données à l'appui de la conjecture, les méthodes d'obtention des conjectures peuvent être présentées, discutées comme un travail mathématique valable. Une certaine spécialisation peut exister, la publication de résultats expérimentaux par des mathématiciens pouvant motiver la recherche d'une preuve par d'autres. Il est donc possible de considérer les 'mathématiques expérimentales' 'comme un domaine nouveau (Borwein et al., 1996) ayant une dimension pratique – la production de procédures d'investigation et de transmission systématique des conjectures – et une dimension théorique – la définition de structures des domaines mathématiques suffisamment générales pour permettre cette production.

Cette visibilité nouvelle des 'mathématiques expérimentales' participe au climat favorable à l'introduction des instruments informatiques dans l'enseignement de cette discipline. La didactique étudie comme un phénomène de 'transposition' l'existence de savoirs ou de pratiques comparables dans deux institutions, ici, les mathématiques expérimentales dans la recherche et dans l'enseignement secondaire. Il est ainsi possible de repérer cette transposition dans les orientations curriculaires en matière d'usage de la technologie, lorsque par exemple, les programmes nationaux pour les lycées français assignent à l'utilisation de la calculatrice le rôle d''alimenter la recherche'[3].

Analyser '*la transposition didactique*' (Chevallard, ibid., p. 14) c'est considérer les '*genèses, filiations, ruptures et refontes*' qui font que le fonctionnement didactique du savoir et le fonctionnement savant sont différents, tout en constituant deux régimes du savoir en interrelation. Un savoir, un type d'activité, existant à la fois dans la sphère savante et dans l'enseignement, s'apparentent par leur nature commune, mais sont soumis, dans chacune des institutions aux contraintes de fonctionnement propres à ces institutions. Ainsi, les 'mathématiques expérimentales' ont trouvé leur fonction dans la recherche mathématique en développant un domaine tant technique que théorique. Du côté de l'enseignement, les mathématiques expérimentales restent plus problématiques. Des caractéristiques telles que l'immédiateté et la double référence peuvent engager les élèves dans une activité vaine alors qu'elles assurent la productivité des technologies informatiques dans la recherche. D'autres obstacles viennent de la conception des situations d'apprentissage qui surestiment la possibilité pour les élèves à dégager spontanément des concepts à partir de leur activité avec un logiciel, comme nous allons le voir en rappelant deux observations.

Une hypothèse souvent avancée est qu'un système de calcul symbolique va permettre de faire le lien expérimentalement entre des manifestations d'une même propriété dans différentes représentations – ou, plus précisément dans différents 'registres' au sens de Duval (1996) – mais la préparation des élèves qui serait nécessaire pour une telle mise en relation est souvent sous-estimée. Par exemple, Wain (1994) observe des élèves de 14/15 ans qui doivent établir avec le logiciel DERIVE un lien entre les zéros d'un grand nombre de fonctions, et les intersections des courbes représentatives avec l'axe des abscisses. Quand les valeurs ne sont pas entières, certains élèves ne parviennent pas à reconnaître la valeur décimale lue dans la fenêtre graphique comme une approximation de la solution obtenue dans la fenêtre algébrique, ce qui rend inopérant le travail de mise en relation de la lecture graphique et de la résolution symbolique prévu par le professeur. Pour que l'expérimentation des élèves soit efficace, il aurait fallu qu'ils aient une certaine préparation de façon à mieux considérer les rapports entre valeur exacte et valeur approchée, et à reconnaître le caractère d'approximation des valeurs lues dans la fenêtre graphique. Les approches récentes de l'utilisation des calculatrices complexes (Guin et Delgoulet, 1996, pp. 42–45, par exemple) incluent cette préparation comme une composante essentielle d'une instrumentation efficace.

Le calcul formel est aussi souvent vu comme permettant à des élèves de faire des expériences sur des phénomènes symboliques et d'en inférer des structures générales. Là aussi, la capacité des élèves à opérer une véritable généralisation mathématique est souvent surestimée. Pozzi (1994) rapporte par exemple une observation d'élèves à qui l'on demandait de trouver une règle générale pour la dérivation du produit d'un polynôme par une fonction trigonométrique en expérimentant à partir de dérivées obtenues avec DERIVE. Pozzi note que la difficulté des élèves est qu'ils raisonnent sur la forme des écritures données par DERIVE (leur syntaxe) alors que, pour que l'expérimentation aboutisse, il faudrait qu'ils raisonnent sur la structure des expressions obtenues (leur sémantique). Il conclut que, dans une telle activité, loin de découvrir des structures mathématiques, l'élève peut se créer des modèles erronés qui se constituent en 'misconceptions'.

Au cours de l'expérimentation de la calculatrice 'complexe' TI-92 (Lagrange, 1999b, pp. 73–75), nous avons recherché les conditions pour que les élèves puissent avoir une véritable activité expérimentale sur les phénomènes symboliques liés aux limites et aux dérivées. Deux conditions sont apparues nécessaires. La première est que les élèves aient une connaissance suffisante du concept en jeu, ainsi que de la façon dont la machine

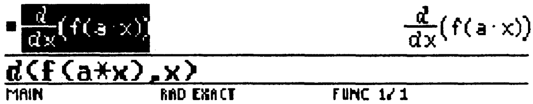

Figure 1. TI-92.

```
* diff(f(a*x),x);

*

                a D(f)(a x)
```

Figure 2. Mupad.

le traite. Pour que la 'double référence' fonctionne de façon productive, il faut qu'ils puissent faire la part, dans les résultats qu'ils obtiennent, des phénomènes générés par l'algorithme et de ceux qui ont une signification mathématique.

Par exemple, nous avons posé aux élèves la question de la dérivation de la composée d'une fonction quelconque $x \to f(x)$ et d'une fonction linéaire $x \to ax$. Dans une première approche, les élèves ont simplement 'entré le problème dans la TI-92'. Comme l'écran (Figure 1) le montre, la machine passe d'une expression entrée en ligne $d(f(a * x), x)$ à une expression différentielle que les élèves ont transcris à l'aide de la notation 'prime' en usage dans le secondaire $f'(ax)$. Dans ce cas, la transcription est trompeuse. En effet, contrairement à d'autres systèmes comme Mupad (Figure 2) la TI-92 n'a pas de notation pour la dérivée d'une fonction. Certains élèves pensaient alors que le nombre dérivé de la composée au point x, était bien donné par la machine comme $f'(ax)$, ce qui constitue une 'misconception' au sens de Pozzi (ibid.)

D'autres élèves, entraînés à observer de façon critique les résultats de la machine, ont noté que les deux expressions affichées par la TI-92 étaient les mêmes. Sachant que l'expression de gauche réécrit sous forme mathématique l'expression entrée sans la transformer, et que l'expression de droite résulte d'une simplification, ils ont pu mettre en évidence que la TI-92 ne donnait tout simplement pas de réponse, et engager la classe dans une autre démarche consistant à essayer de dériver des fonctions connues. Cette démarche s'est révélée productive grâce aux fonctions trigonométriques. Nous avions en effet anticipé ce besoin d'observables significatifs en faisant travailler les élèves lors d'une séance précédente sur les dérivées des fonctions trigonométriques, les fonctions polynomiales ne donnant pas d'observables suffisamment significatifs.

Une seconde condition pour qu'une activité expérimentale puisse réellement exister est qu'une véritable question soit mise à l'épreuve. Beaucoup de phénomènes symboliques ne sont pas en eux-mêmes problématiques pour les élèves. C'est le cas des phénomènes de conservation, le fait par exemple que la limite de la somme de deux fonctions en un point soit la somme des limites. Même des cas de non conservation, comme les indéterminations de limites, ou la dérivation du produit de deux fonctions, demandent à être 'mis en scène' par le professeur pour que les élèves s'engagent dans les anticipations par lesquelles ils conçoivent des structures générales.

Au cours de l'expérimentation TI-92, pour problématiser la question des techniques algébriques de calculs de limites, nous avons centré la recherche sur les cas d'indétermination. Nous l'avons organisée avec les élèves, montrant d'abord à l'aide de la TI-92 que la limite de la somme d'une fonction tendant vers plus l'infini et d'une fonction tendant vers moins l'infini n'est pas nécessairement nulle, puis demandant aux élèves de produire des exemples pour déterminer, dans une première phase, quelles valeurs pouvait être obtenues dans ce cas, et, dans une deuxième phase, quels sont les cas d'indétermination de limites de produits. Le cas du produit d'une fonction ayant une limite nulle et d'une fonction ayant une limite infinie a fait l'objet d'un long débat dans la classe, beaucoup d'élèves pensant au départ que ce produit a nécessairement une limite nulle et produisant des exemples en conséquence. La découverte par un élève d'un exemple de limite non nulle a déclenché la recherche d'autres exemples.

Dans ce paragraphe, j'ai voulu indiquer les obstacles auxquels se heurte une activité expérimentale en milieu scolaire avec un instrument informatique, que le but de cette activité soit de faire interagir des représentations ou de dégager des structures générales. A l'aide d'exemples de l'expérimentation TI-92, j'ai montré quel travail de conception des séances est nécessaire pour que les élèves soient suffisamment préparés à cette activité.

Ainsi, la transposition des 'mathématiques expérimentales' de la recherche vers l'enseignement est plus problématique que ce que des discours généraux laissent penser. Nous apercevons, à travers les exemples, qu'il n'y a pas de miracle à attendre et que même si, grâce aux nouveaux gestes permis par la technologie, les élèves disposent d'observables plus nombreux et plus facilement obtenus, l'enseignement ne pourra faire l'économie d'une structuration du domaine à explorer, ainsi que d'une organisation en techniques de ces gestes d'exploration.

4. L'OPPOSITION ENTRE COMPRÉHENSION ET HABILETÉS

Dans les discours sur les avantages de la technologie, l'opposition entre les concepts et 'habiletés manipulatoires' est, avec les 'mathématiques expérimentales', un autre thème très courant. Dans la littérature internationale de langue anglaise, cette opposition se marque entre les deux termes '(conceptual) understanding' et '(manipulative) skills'[4]. Au delà des différences de langue, l'opposition se situe bien entre la compréhension d'un domaine théorique et les habiletés pratiques, manipulatoires, qui permettent l'activité dans le domaine, mais sont aussi souvent considérées comme vides de sens. Dans ce paragraphe, je vais interroger cette opposition et son corollaire implicite: la technologie, en libérant l'élève de la pratique d'habiletés manipulatoires permet de travailler directement les concepts.

Rachlin (1989) rappelle que la tension concepts/manipulation est ancienne, notamment dans l'enseignement de l'algèbre.

> Teachers (in the USA) even (in 1890) were opposed to what they saw as an overemphasis on manipulative skills and were calling for a meaningful treatment of algebra that would bring about more understanding.

Depuis une vingtaine d'annés, les nouvelles technologies sont présentées comme une possibilité de diminuer la part des manipulations et de rééquilibrer les mathématiques scolaires en faveur de la compréhension. A la suite d'une conférence tenue en mars 1987 sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, Kieran et Wagner (1989) rapportent ainsi les hypothèses émises dans une session consacrée à la technologie:

> On the assumption of the universal access to the new technology, we now have the tools that enable us to modify our skill-dominated conception of school algebra and rebalance it in favour of objectives related to understanding and problem solving.

Parmi les moyens technologiques proposés pour l'apprentissage des mathématiques le calcul symbolique est apparu comme un moyen privilégié d'un rééquilibrage en faveur du conceptuel car il est en quelque sorte 'plus mathématique' que d'autres technologies, grâce aux calculs en mode exact, et à la possibilité d'utiliser sans programmer. Fey (1989) précise:

> (...) the use of symbol manipulation software in teaching calculus does permit greater emphasis on concept development and problem solving and this range of priorities pays off in greater student understanding and skill in those aspects of the subject.

De nombreux travaux de recherche ont ainsi posé comme hypothèse une forte séparation des dimensions techniques et conceptuelles et se sont donnés comme objectif de promouvoir, dans les utilisations de systèmes de calcul symboliques, la dimension conceptuelle. Ces hypothèses ont été mises en avant et éprouvées par étude comparative dans les thèses soutenues dès 1984 aux Etats-Unis.

Heid (1988) est un exemple très marquant de ce type de recherche. Ainsi Pérez Fernàndez (ibid, p. 362) tire argument de cette étude parmi d'autres pour attribuer aux systèmes de calcul symbolique la capacité, en eux-mêmes, de faire progresser les élèves 'vers des niveaux supérieurs de pensée formelle'. Je vais, dans ce paragraphe, étudier cette recherche et confronter ses résultats à ce que nous ont appris les expérimentations des systèmes de calcul symbolique dans les classes du secondaire français.

La thèse de Heid (ibid. p. 7) est que l'utilisation de l'ordinateur permet de remodeler ('refashion') l'introduction de l'analyse en mettant l'accent sur les concepts, les applications et la résolution de problèmes. Ce faisant, l'auteur propose de modifier l'ordonnancement ('resequence') traditionnel qui donnerait la priorité (dans le temps et dans la durée) aux habiletés ('skills') sur la compréhension des concepts.

Une première remarque est que, avec quinze années de recul, l'expérience de Heid garde toute son actualité. Les logiciels encore rudimentaires de l'époque (un grapheur et un logiciel symbolique séparés et peu interactifs) sont mis au service d'un projet de nouvelle introduction de l'analyse que l'auteur enseigne avec passion. Les approches graphiques des concepts, la réflexion sur la signification des résultats sont encouragées, les étudiants sont confrontés à des classes plus larges de problèmes. L'auteur s'interdit, dans les 12 premières semaines d'un enseignement qui en compte en tout 15, de développer chez les élèves les habiletés traditionnelles en analyse: calcul algébrique de limites, de dérivées, de primitives, tracé de graphes de fonction et études de variations. L'auteur insiste sur la meilleure performance de ses étudiants par comparaison avec un groupe ayant reçu un enseignement traditionnel à des 'questions conceptuelles'. L'examen commun aux deux groupes montre que les étudiants 'expérimentaux' n'ont pas souffert du retard avec lequel ils ont développé leurs habiletés calculatoires. L'étude de Heid a donc son intérêt en tant qu'expérimentation d'un enseignement nouveau de l'analyse dans un contexte où l'ordinateur permet plus facilement certaines approches.

En seconde analyse, l'opposition entre compréhension et habiletés manipulatoires ('skills') engendre un malentendu sur la possibilité de faire exister un enseignement visant directement les concepts. En effet, l'étude des résultats obtenus par Heid montre selon moi que l'enseignement présenté par cet auteur simplement comme 'centré sur les concepts' recouvre des processus complexes d'apprentissage d'où les techniques ne peuvent être absentes.

Selon Heid (ibid. p. 15), les étudiants expérimentaux ont 'davantage témoigné de compréhension conceptuelle'. La lecture des extraits d'interviews présentés dans l'article montre de fait, chez ces étudiants, une certaine capacité à mobiliser des représentations variées des concepts à divers niveaux. Par exemple, ils interprétent un maximum d'une fonction deux fois différentiable comme un point de la courbe représentative où la pente passe d'une valeur positive à une valeur négative et retrouvent ainsi une règle permettant de distinguer un maximum d'autres points où la dérivée s'annule par le signe de la dérivée seconde. Les étudiants du groupe de contrôle font quant à eux exclusivement appel à cette règle qu'ils mémorisent mal par défaut de compréhension. Heid note cependant (ibid., p. 17) que les étudiants expérimentaux n'ont pas acquis "une notion claire de la limite et du taux de variation, typiquement difficile" et ne se différencient pas ainsi des étudiants du groupe de contrôle.

Heid appuie aussi son analyse sur les résultats comparés des élèves expérimentaux et de ceux du groupe de contrôle à des questions 'conceptuelles'. Les élèves expérimentaux ont des résultats d'ensemble légèrement meilleurs, mais les questions où il surclassent nettement les autres élèves sont peu nombreuses. Considérons l'une de ces questions:

> Thus far in the course you've learned no rule for finding the derivative of a function like $f(x) = 3^x$. Explain how you could find $f'(4)$.

Heid ne donne pas d'autre information que le pourcentage de succès. Ce pourcentage est insignifiant dans le groupe de contrôle et approche 15% chez les élèves expérimentaux. Mon interprétation est que les élèves échouent parce qu'ils conçoivent seulement le nombre dérivé comme valeur en un point de la fonction dérivée, cette fonction étant elle même comprise comme résultat d'une manipulation symbolique sur la fonction initiale. Ils vont donc être désemparés par l'absence de 'règle de dérivation' pour les fonctions exponentielles. Une erreur courante est, dans cas, l'invention d'une règle symbolique de dérivation erronée, par exemple celle qui, inspirée de la dérivation des polynôme, donnerait $f'(x) = x \cdot 3^{x-1}$ et donc $f'(4) = 4 \cdot 3^3$. En revanche, un élève qui a présent à l'esprit une définition du nombre dérivé comme limite du quotient différentiel pourra réussir en exprimant cette limite avec les données de l'énoncé. De plus, faisant le lien avec la représentation graphique des exponentielles, il pourra rejeter la dérivation $f'(x) = x \cdot 3^{x-1}$ qui donnerait une pente nulle à l'origine.

Le succès de certains élèves expérimentaux semble donc montrer que l'enseignement 'avec technologie' a constitué un terrain favorable pour que le nombre dérivé puisse exister dans la compréhension des élèves sans être 'écrasé' par la dérivation symbolique, ce qui confirme la tendance observée dans les interviews à mobiliser et à articuler des représentations variées. Cependant, il ne me paraît pas possible d'attribuer cette tendance à la technologie à elle seule. En effet, l'influence de la technologie n'est pas nécessairement positive: les gestes 'immédiats' du calcul formel peuvent aussi bien que les gestes 'laborieux' en papier/crayon installer une compréhension étroite des concepts de l'analyse comme objets symboliques. Monaghan et al. (1994) l'ont bien montré à propos des limites. Pour des élèves ayant utilisé DERIVE, ce concept était étroitement lié au geste d'obtention d'une limite avec ce logiciel.

Il convient donc en premier lieu de relativiser l'interprétation de l'article donnée dans les discours rapportés plus haut. La tendance constatée, pour intéressante qu'elle soit, ne peut être qualifiée de progrès décisif 'vers des niveaux supérieurs de pensée formelle'. Il faut aussi s'interroger sur la contribution de la technologie à cette tendance. L'article de Heid ne permet pas d'apprécier réellement cette contribution faute d'informations sur l'organisation de l'enseignement. En revanche, les expérimentations françaises (Lagrange, 1999b, p. 73) sur l'intégration des calculatrices complexes nous ont permis d'apercevoir qu'il existe des conditions pour que la technologie contribue à la formation chez les élèves de représentations variées des concepts et que ces conditions ne sont pas faciles à établir, même par des enseignants conscients des effets réducteurs possibles du calcul formel.

Une représentation d'un concept n'existe pas sans les techniques qui lui sont associées. Or la technique d'obtention d'un résultat symbolique à l'aide de la calculatrice tend à s'imposer par sa simplicité et son efficacité au détriment de techniques plus laborieuses, basées sur d'autres représentations. Une première condition est donc que, quotidiennement dans les situations d'utilisation de la calculatrice, le recours aux différentes représentations et techniques associées soient encouragé: par exemple, si les élèves sont tentés d'utiliser le calcul formel pour une limite comme $lim_{x \to \infty} \frac{1}{x+1}$ il faudra que l'enseignant fasse appel à la représentation graphique de la fonction $x \to \frac{1}{x+1}$ ou à une majoration par la fonction $x \to \frac{1}{x}$ pour montrer que le 'raisonnement' est parfois plus économique que la machine.

Pour que les élèves puissent mobiliser de façon équilibrée différentes compréhensions d'un concept il faut aussi que l'organisation de l'enseignement tienne compte des nouvelles techniques. A titre d'exemple, dans l'expérimentation TI-92 un travail a été fait pour développer chez les élèves des compréhensions variées du concept de dérivée, en articulant différents rapports à la dérivée, 'enactive' et 'manipulative'[5] (Tall, 1996) et différents statuts du concept, 'outil' et 'objet' (Douady, 1986).

Des activités ont été organisées pour que les élèves prennent conscience de phénomènes différentiels de façon 'enactive', notamment dans la fenêtre graphique de leur calculatrice, et rencontrent les limites d'une étude graphique de ces phénomènes. Il a fallu ensuite un temps assez long pour que les élèves développent des techniques algébriques d'étude de ces phénomènes, d'abord en élaborant des techniques 'papier/crayon', puis en les adaptant et en les systématisant dans la fenêtre algébrique. C'est seulement à l'issue de ce travail que les élèves ont rencontré les propriétés algébriques des limites et des dérivées, comme base de nouvelles techniques 'manipulative' d'obtention des dérivées.

Après avoir ainsi étudié la dérivation comme 'objet', les élèves ont pu ensuite l'utiliser comme 'outil' dans des problèmes d'optimisation. Ces problèmes existaient pour eux dans les classes antérieures par les approches graphico-numérique permises par les calculatrices graphiques puis par des techniques algébriques, assez laborieuses en papier crayon. La dérivation leur a permis de compléter ces approches par des techniques formelles permettant la recherche de solution exactes pour des classes plus larges de problèmes. Ensuite, à un moment où le caractère outil de la dérivation aurait pu faire oublier les aspects conceptuels de la dérivation, les élèves ont eu à faire un travail en cinématique qui a constitué un retour à la fois au statut 'objet' et au rapport 'enactive'.

Confrontant ainsi l'étude de Heid à cette expérience d'intégration d'un système de calcul symbolique, il me semble que certes, les habiletés manipulatoires tendent à prendre moins de place dans les apprentissages que dans un enseignement sans ordinateurs mais que, pour autant, la technologie ne permet pas un enseignement 'directement conceptuel'. Le chemin des élèves vers la compréhension reste long et hasardeux. Comme en papier/ crayon, il leur faut, à partir de tâches soigneusement organisées par le professeur, élaborer des techniques de résolution comme bases sur lesquelles peuvent se développer des compréhensions suffisamment riches des concepts. L'opposition entre les concepts et les habiletés manipulatoires masque donc un point essentiel. Il existe une dimension technique dans l'activité mathématique des élèves qui ne se réduit pas aux habiletés. Quand la technologie est utilisée, cette dimension est différente, mais elle garde son importance dans l'accès des élèves à la compréhension.

Nous retrouvons donc comme question centrale, la place des techniques dans les apprentissages que nous avions déjà aperçue en analysant les conditions pour que l'utilisation de moyens informatiques s'insère dans une véritable activité expérimentale. Le paragraphe suivant va préciser ce qu'est une technique, en quoi une technique se distingue d'une 'habileté manipulatoire' et quel rôle elle peut jouer dans la conceptualisation.

5. Les techniques

Mercier (1996) a montré la genèse de l'idée de technique à partir des difficultés rencontrées dans l'enseignement de l'algèbre. Cette genèse me paraît particulièrement éclairante pour comprendre le rôle des techniques dans l'enseignement et l'apprentissage. En voici une présentation en quelques lignes.

Au départ de sa réflexion, Mercier souligne le risque que l'algèbre disparaisse des mathématiques scolaires par suite des difficultés rencontrées par les élèves et de l'importance donnée à la résolution de problèmes et aux méthodes numériques. Les 'habiletés' algébriques étant souvent présentées dans les discours sur l'enseignement comme sans signification, et les calculatrices et tableurs pouvant être utilisés par les élèves comme aide à l'exploration et à la résolution numérique des problèmes, pourquoi continuer à exiger des élèves une résolution symbolique dans laquelle beaucoup échouent ?

Mercier montre ensuite la puissance de l'algèbre, sa place potentielle comme fondement des mathématiques scolaires. A la recherche des raisons de la difficile position de l'algèbre dans la réalité des pratiques mathématiques des élèves, il souligne l'effet des réformes successives qui ont conduit à ce que les techniques algébriques soient réduites à des habiletés isolées et sans signification. D'une part, l'enseignement insistant moins sur la preuve, les tâches que ces techniques auraient pu contribuer à mener à bien n'existent plus. D'autre part, l'accent mis sur les aspects pratiques de la résolution fait qu'il n'y a plus la réflexion théorique sur les manipulations algébriques susceptible d'en faire des entités mathématiques à part entière.

Il est apparu ainsi que des techniques ne peuvent exister de façon isolée dans l'enseignement et l'apprentissage. De cette observation est née l'idée de praxéologie. Selon Chevallard (1999, p.223), "*toute activité humaine régulièrement accomplie* (c'est-à-dire accomplie dans une institution) *peut-être subsumée sous un modèle, que résume (...) le mot de praxéologie*". Le modèle s'organise sur plusieurs niveaux. Le premier niveau est celui des tâches. Au second niveau, les techniques sont les façons particulières, 'adéquates', d'accomplir ces tâches dans l'institution. Au troisième niveau, celui des théorisations, il s'agit d'interroger les techniques sur leur consistance et leur domaine de validité. C'est le niveau où un langage spécifique apparaît, où des concepts émergent[6]. L'enseignement/apprentissage d'un sujet mathématique dans une institution didactique (ou, comme le dit Chevallard, l''étude d'une œuvre') est une activité humaine particulière, avec une 'dynamique' spécifique qui va conduire à 'recréer l'œuvre'. Dans cette dynamique, les tâches sont d'abord des problèmes. Les techniques s'élaborent relativement aux tâches puis se hiérarchisent. Des techniques officielles émergent et les tâches 'se routinisent' en devenant des moyens pour perfectionner ces techniques. L'environnement théorique se constitue pour rendre compte des techniques, de leur fonctionnement et de leurs limites. Il se développe ensuite au cours d'un 'travail de la technique' qui vise à la fois l'amélioration des techniques et leur maîtrise[7].

A partir de cette approche, il est possible de voir une technique comme un ensemble de gestes (au sens du paragraphe 2) trouvant sa signification mathématique dans une double relation avec d'une part les tâches qu'elle permet d'accomplir et d'autre part les théorisations auxquelles elle peut donner lieu. Considérons par exemple (Chevallard, ibid. p. 243), la technique classique de réduction des expressions du type $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$, a, b, c, d entiers en $\alpha + \beta\sqrt{2}$, α, β rationnels. Une tâche d'approximation est une motivation pour développer cette technique, la forme réduite permettant plus facilement un encadrement. Plus fondamentalement, cette technique trouve son intérêt en procurant un système d'écriture 'canonique' permettant de reconnaître aisément l'égalité de quotients comme $\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}$ et $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$. Au niveau théorique, l'idée que cette technique 'fonctionne toujours' débouche sur la structure de corps de l'extension algébrique $Q[\sqrt{2}]$ tout en fournissant un algorithme d'obtention des coordonnées d'un élément dans la base canonique.

Bien sûr, une technique peut exister à certains moments comme une 'habileté manipulatoire'. C'est particulièrement le cas lorsqu'une certaine 'routinisation' est nécessaire: nous avons tous dû, dans la période encore récente où les seuls instruments du travail mathématique étaient le papier et le crayon, nous entraîner aux techniques de calcul qu'elles soient numériques ou symboliques, et, dans cette période d'entraînement, mettre de côté les tâches et les théories qui donnent leur sens à ces techniques. Il est certain que la disponibilité de nouveaux instruments diminue l'urgence de cette routinisation. L'étude de Heid confirme cela. Mais il ne faut pas considérer seulement les techniques sous leur forme routinisée. Le travail de constitution de techniques en réponse à des tâches, et d'élaboration théorique sur les problèmes posés par ces techniques reste fondamental dans l'apprentissage.

La disponibilité d'instruments nouveaux remet certes en cause le rôle de techniques dont la place semblait bien établie lorsque nous disposions seulement du papier et du crayon. Par exemple, la TI-92 effectue en un geste immédiat la réduction ci-dessus alors que la technique papier/crayon associe plusieurs gestes de façon laborieuse. En revanche, la nécessité demeure d'un niveau technique, intermédiaire entre les tâches et les théories. L'activité expérimentale à l'aide de la technologie ne peut se concevoir comme une émergence directe de significations à partir de faits symboliques produits par l'instrument. Des techniques d'exploration, de problématisation sont nécessaires. L'apprentissage de concepts, notamment en analyse, suppose que les élèves, à partir de tâches soigneusement organisées par les professeur, élaborent des techniques de résolution, utilisant ou non la technologie, comme bases sur lesquelles développer des compréhensions variées.

Les nouveaux instruments du travail mathématique ont donc un intérêt non parce qu'ils permettraient de 'sauter' du niveau des tâches à celui des théories, mais par les nouvelles techniques qu'ils peuvent permettre aux élèves de développer et qui constituent un pont entre tâches et théories. Je vais montrer dans ce paragraphe comment l'accent mis sur les techniques dans l'utilisation des instruments nouveaux permet d'interpréter les phénomènes observés lors de situations d'utilisation de DERIVE.

L'étude sur l'utilisation de DERIVE dans l'enseignement secondaire français, menée à partir de la rentrée 1993 a permis, grâce à des observations de classes, couplées à un relevé par questionnaires des attentes des professeurs et des attitudes des élèves, d'établir un constat systématique des difficultés rencontuées et d'initier des pistes pour y remédier (Lagrange, 1996; Artigue, 1997).

Les données que nous avons recueillies ont montré qu'à quelques rares exceptions près, l'objectif d'intégration de DERIVE à l'enseignement n'a pas été atteint et qu'une utilisation, même épisodique, de DERIVE est plus difficile que ce que les professeurs attendait. DERIVE a été perçu par les élèves d'abord comme un outil pour effectuer des calculs pénibles et vérifier les résultats obtenus dans des environnements standards, ce qui correspond aux fonctionnalités du logiciel les plus faciles à mettre en œuvre. Peu d'élèves ont vu DERIVE comme un outil de compréhension, d'apprentissage, ce qui était pourtant l'objectif des professeurs. Une fraction importante des élèves a considéré que DERIVE complique notablement leur travail mathématique, ce qui renvoie à des difficultés de mise en œuvre du logiciel, souvent non anticipées par le professeur.

Les données recueillies auprès des enseignants étaient aussi en décalage avec les potentialités attribuées a priori à DERIVE. Les professeurs ont rapporté des difficultés à mettre en œuvre leurs idées, écrivant par exemple que DERIVE finalement ne supprime pas les difficultés calculatoires autant qu'ils le pensaient, que, même avec l'aide de DERIVE, il est difficile de gérer efficacement des activités expérimentales.

Ces observations montrent bien l'effet d'une absence de réflexion sur les techniques dans les anticipations des professeurs. En effet, les élèves étaient supposés percevoir des aspects conceptuels dans les résultats donnés par DERIVE. Mais il leur manquait pour cela les techniques qui leur auraient permis d'introduire une rationalité dans la résolution sur laquelle faire fonctionner une réflexion théorique, et donc ils pouvaient seulement avoir des comportements d'adaptation tels que le comportement de 'pêche' souligné au paragraphe 2. Les difficultés de mise en œuvre du logiciel témoignent aussi d'un déficit en techniques d'utilisation du logiciel. La nécessité de ces techniques n'était pas souvent reconnue par les professeurs. Même dans le cas où le professeur reconnaissait à ces techniques une certaine existence, suffisante pour que les élèves puissent utiliser le logiciel, il ne les utilisait pas comme base pour une réflexion théorique, car elles lui paraissaient trop éloignées des significations mathématiques telles qu'elles se construisent dans les situations habituelles. La pratique du logiciel restait donc très séparée des situations habituelles. Pour les élèves, les techniques 'papier/crayon' développées dans ces situations demeuraient celles qui 'font sens' et il n'est donc pas étonnant que, pour eux, le logiciel ne contribuait pas à la compréhension.

6. La prise en compte de techniques liées au logiciel

Je vais montrer à l'aide d'un exemple comment l'analyse de la dimension technique du travail avec la technologie a permis de mieux penser l'intégration d'un logiciel comme DERIVE. Il s'agit de la situation des factorisations de $x^n - 1$, déjà évoquée au paragraphe 2.

Le problème, posé en première S (11ème grade, filière scientifique), est de conjecturer et de prouver des factorisations générales des polynômes de la forme $x^n - 1$ en observant des factorisations pour des valeurs données de n. Nous allons suivre l'évolution de ce problème à travers les trois versions de ce problème que présentent Mounier et Aldon (1996).

Dans la première version, le problème a été étudié au cours d'une seule séance, en papier crayon. Selon des observations de Mounier et Aldon, les élèves ont trouvé facilement le facteur $x-1$, puis par division sur quelques exemples, le quotient par $x - 1$. Bien sûr, le calcul a été laborieux et, après ce premier résultat, peu d'élèves ont cherché d'autres conjectures.

Dans la seconde version, également sur une séance, Mounier et Aldon voulaient utiliser DERIVE pour que les élèves puissent trouver davantage de factorisations et donc pour étendre leur pratique expérimentale. Une difficulté est que le logiciel donne des factorisations complètes qui ne sont les factorisations générales que pour certaines valeurs de n. Par exemple, la factorisation en deux facteurs n'est obtenue que pour n premier. Les professeurs pensaient que les élèves pourraient trouver des conjectures en observant les factorisations DERIVE, mais aussi en s'en éloignant suffisamment pour qu'elles ne viennent pas cacher les factorisations générales.

En fait, ce fonctionnement est difficilement possible directement pour des élèves de lycée. Voici une démarche typique d'élèves. Ils factorisent pour n=2 et 3 et conjecturent une factorisation générale en deux facteurs $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$. En factorisant pour n=4, ils constatent une irrégularité pour les n pairs, ce que confirme la factorisation pour n=5, 6, 7. Il y a alors pour eux deux factorisations distinctes, l'une valable pour les impairs, l'autre pour les pairs: $(x-1)(x+1)(x^{n-2}+x^{n-4}\ldots+1)$. Ils tentent de confirmer par exemple pour n=9, mais ils obtiennent alors une factorisation en 3 facteurs: $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ qui remet en cause leur conjecture. Ils n'avancent plus, car toute conjecture est immédiatement contredite par un nouvel essai.

Ce dysfonctionnement est bien une manifestation d'effets négatifs du phénomène de double référence rappelé au paragraphe 2. Les factorisations 'DERIVE' viennent cacher les factorisations générales qui constituent l'objectif mathématique. Je vais montrer que l'absence de techniques spécifiques à l'utilisation du logiciel est une des causes de ce dysfonctionnement. En effet, les élèves rencontrent deux difficultés liées: l'une est la compréhension des rapports entre les différentes factorisations d'un même polynôme et l'autre est l'absence de techniques pour sélectionner et développer une partie d'une factorisation.

Un mathématicien sait qu'une factorisation par exemple en trois facteurs, va permettre d'obtenir des factorisations en deux facteurs, par regroupement. Même s'il ne connaît pas DERIVE, il devine que le logiciel doit lui donner les moyens d'opérer ce regroupement de deux facteurs. L'élève en revanche n'a pas une conscience claire des relations entre les factorisations et ne connaît pas non plus les ressources du logiciel. Il n'est donc pas étonnant qu'il ne puisse pas se dégager des factorisations DERIVE pour concevoir des factorisations plus générales. Sélectionner et développer une partie d'une factorisation n'est en effet pas une manipulation triviale: elle suppose de connaître les fonctionnalités de recopie spécifiques au logiciel et de les intégrer dans une compréhension de la façon dont les expressions factorisées sont formées. L'élaboration de cette technique est donc un moment essentiel à la fois pour permettre la poursuite de l'activité et pour lui donner sa dimension mathématique.

Ainsi, la technique de regroupement des facteurs dans DERIVE va être une clé pour que l'élève comprenne les rapports entre les différentes factorisations. C'est en effet ainsi que j'interprète la troisième version présentée par Mounier et Aldon. Celle-ci a pris la forme de ce que, en France, nous appelons un 'problème long'. Les élèves disposaient de DERIVE sur ordinateur portable. La première séance a servi à poser le problème et à initier les élèves aux techniques de manipulation des facteurs dans DERIVE. Puis les élèves ont pu pratiquer à la maison, trouver des conjectures et des preuves. Sur trois mois, des moments ont été organisés où les élèves ont présenté l'avancement de leur travail et où le professeur a fait discuter les conjectures produites et relancé la recherche.

La productivité du travail de la technique au cours de ces trois mois s'apprécie dans le rapport fait par les élèves à l'issue de la dernière séance (Mounier et Aldon, ibid. p. 59). Le caractère général de certaines factorisations est reconnu en prenant suffisamment de distance avec les observables de DERIVE. Une factorisation DERIVE non triviale (pour tout n puissance de 2) est prouvée par le regroupement successif de deux facteurs, inspiré de la technique expérimentée dans l'usage du logiciel. La factorisation des polynômes est généralisée à des expressions non polynomiales auxquelles certains élèves parviendront finalement à donner un sens à partir de l'équivalence qu'ils connaissent entre $\sqrt{2}$ et $2^{\frac{1}{2}}$.

Ainsi les techniques d'utilisation d'instruments technologiques, loin d'être triviales ou seulement liées au logiciel peuvent être vues comme des éléments fondamentaux pour le nécessaire 'travail sur la technique'. Au lieu d'en minimiser l'importance ou de les contourner, il est bon de les analyser, de trouver les dispositifs qui permettent à ce travail de se développer.

7. Les nouvelles praxéologies

Les techniques étant des éléments déterminants des organisations praxéologiques, l'apparition de techniques 'nouvelles'[8] va entraîner des difficultés dans les praxéologies existantes et donc la nécessité d'une adaptation de l'enseignement.

Une question souvent posée est celle de l'avenir des habiletés papier/crayon. Bien qu'elles soient mises en danger par la technologie, peu d'auteurs envisagent leur disparition pure et simple. Le 'reséquencement' proposé par Heid est assez représentatif d'une attitude générale de prudence. Cette attitude laisse cependant le problème entier. Je vais essayer de montrer qu'en considérant non plus l'angle des habiletés, mais celui des techniques, il est possible de dépasser cette impression vague que 'tout n'est pas à jeter' pour étudier la dynamique commune des techniques nouvelles et habituelles. Deux exemples vont donner un aperçu de la variété des interactions entre techniques des deux types dans cette dynamique et donc

Un "défi" : pour tout entier n trouver la nième dérivée de $(x^2+x+1)e^x$
(d'après Trouche et al., 1998)

1. Résolution avec DERIVE

   Recherche de pattern

$$\frac{d}{dx}((x^2+x+1)e^x) = e^x(x^2+3x+2)$$

$$\frac{d}{dx}^2_2((x^2+x+1)e^x) = e^x(x^2+5x+5)$$

$$\frac{d}{dx}^3_3((x^2+x+1)e^x) = e^x(x^2+7x+10)$$

   Démonstration

$$\frac{d}{dx}((x^2+(2n+1)x+n^2+1)e^x) = e^x(x^2+x(2n+3)+n^2+2n+2)$$

2. Un "second regard"

   "Nous cherchons les dérivées du produit de deux fonctions u et v, avec $u=e^x$ et $v=x^2+x+1$. Toute dérivée de u est u, la dérivée première de v est $2x+1$, la dérivée seconde est 2 et les autres dérivées de v sont nulles. A partir de là, nous calculons les trois premières dérivées du produit uv. Pour généraliser, nous utilisons la formule de Leibnitz et trouvons pour tout n : $(uv)^{(n)} = uv + nuv' + \frac{n(n-1)}{2}uv''$. Nous retrouvons ainsi l'expression de la nième dérivée de $(x^2+x+1)e^x$."

Figure 3.

de la richesse potentielle des praxéologies nouvelles permises par les instruments informatiques. Ensuite nous verrons les problèmes que pose aux différents niveaux de l'institution didactique la constitution de ces praxéologies.

7.1. *Une technique 'habituelle' pour élargir la signification de résultats obtenus par recherche de pattern*

Voici un premier exemple où une technique 'nouvelle' intervient sur un plan local et où une technique 'habituelle' s'impose pour donner un sens plus global aux résultats des élèves. Il est extrait d'une brochure Trouche et al. (1998) où des élèves d'une classe de Terminale (dernière année de l'enseignement secondaire français) présentent leur travail de résolution de problème au cours de l'année. Deux élèves exposent leur solution au problème suivant: trouver la forme des dérivées successives du produit d'un polynôme de degré 2 par la fonction exponentielle. Cette tâche s'insère bien dans une praxéologie qui conduirait à considérer la dérivation comme une opération interne dans l'ensemble des produits de la fonction exponentielle par les polynômes de degré donné. La technique avec un logiciel de calcul formel (Figure 3, première partie), consiste à opérer plusieurs dérivations et à reconnaître des régularités ('pattern'), puis à conjecturer une forme générale. Le résultat peut aussi être démontré à l'aide du calcul symbolique. Le problème est ainsi résolu sans connaissances sur la dérivation d'un produit.

Dans la brochure (Figure 3, seconde partie), les élèves déclarent que cette recherche les mène bien au résultat cherché, mais qu'elle les laisse insatisfaits. C'est pourquoi ils produisent une autre solution, n'utilisant pas le logiciel, basée sur les dérivées successives de l'exponentielle et du polynôme et sur la formule de Leibnitz qui généralise la technique de dérivation d'un produit de fonctions. Pourquoi ces élèves se posent-ils à nouveau un problème qu'ils ont déjà résolu ? Quel rôle font-ils jouer à leurs connaissances sur la dérivation d'un produit ? La praxéologie locale dans laquelle s'inscrit la recherche de pattern ne met pas en rapport les objets du problème avec des savoirs plus globaux. Ou, dit plus naïvement: la résolution avec le calcul symbolique 'n'explique pas' pourquoi la dérivation conserve l'ensemble des produits de la fonction exponentielle par les polynômes de degré donné. Ainsi, revenir à une technique papier/crayon aide à insérer la question dans des rapports plus globaux aux objets de l'analyse.

Il existe d'autres exemples en analyse où une technique 'habituelle' élaborée au départ pour obtenir des résultats symboliques joue ensuite un rôle organisateur dans des connaissances plus vastes. L'intégration par parties est considérée par certains comme dépassée à une époque où les calculatrices donnent facilement les primitives utiles. Elle est cependant d'un grand secours quand il s'agit d'expliquer pourquoi le calcul symbolique trouve des primitives des fonctions $x \to x^n e^{x^2}$ seulement pour n impair. Les techniques habituelles en analyse jouent ainsi un rôle qui dépasse largement les manipulations calculatoires.

7.2. *Une technique nouvelle pour généraliser et systématiser*

Un second exemple va montrer que les différentes techniques peuvent avoir des fonctions respectives différentes. Il s'agit d'un problème d'optimisation avec généralisation, expérimenté au cours de la recherche TI-92.

Nous avons retenu une situation où il s'agit d'optimiser les dimensions d'une cuve (Figure 4). L'épaisseur et le volume intérieur de la cuve

La cuve, un problème d'optimisation avec généralisation

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de $20cm$ d'épaisseur et pouvant contenir $4m^3$. On désigne par x (en m) le côté du carré intérieur et par h (en m) la hauteur intérieure de la cuve. On veut déterminer x et h pour que le volume de béton utilisé soit minimal.

1. Cas numérique : Exprimer le volume de béton en fonction de x seul. On notera $V(x)$ ce volume.

   Etudier le sens de variation de la fonction V. V admet-elle un minimum ? Déterminer alors les dimensions de la cuve pour lesquelles ce volume est minimal.

2. Première généralisation : Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres, le volume de la cuve étant toujours $4m^3$.

3. Seconde généralisation : Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de e mètres, le volume de la cuve à réaliser étant V_0.

Figure 4.

sont d'abord des constantes numériques puis, dans la généralisation, sont des constantes symboliques. Sur le plan des connaissances à développer chez les élèves, la généralisation conduit à une réflexion sur les résultats différente de celle du cas numérique. Par exemple, dans le cas numérique et dans la première généralisation, la dimension optimale est la même constante numérique (4 mètres). Mais ce résultat a une signification différente dans la généralisation, puisqu'elle montre que la dimension optimale ne dépend pas de l'épaisseur de la cuve.

Nous attendions aussi que les généralisations demandées dans ce problème aient un effet sur les techniques de résolution employées par les élèves. La technique usuelle pour les élèves de recherche d'optimalité sur des fonctions numériques fait interagir les registres graphiques, numériques et symboliques. Les explorations graphiques et numériques donnent du sens au problème, guident dans l'étude symbolique, mais pour beaucoup d'élèves, les statuts respectifs des registres vis à vis de la preuve ne sont pas clairs. Par exemple, certains élèves vont calculer les zéros de la dérivée de façon symbolique, mais ils vont étudier le signe de cette dérivée sur son graphe. La généralisation à une fonction dépendant d'une constante symbolique introduit une rupture, puisque seule une technique d'étude entièrement symbolique devient possible. Nous attendions de cette rupture qu'elle contribue à donner à l'étude symbolique une portée différente de celle des explorations graphiques et numériques. En effet, dans les situations habituelles, les élèves effectuent souvent l'étude du signe de la dérivée par factorisation seulement pour se conformer au contrat didactique, après s'être convaincu des variations par lecture graphique ou numérique.

Nous attendions bien sûr de la TI-92 qu'elle aide à la dévolution de cette généralisation car, à la main, les calculs avec constantes symboliques seraient trop laborieux pour les élèves. En effet, l'expression du volume de béton est $\frac{e(x^4+4ex^3+4ex^2+4V_0x+4eV_0)}{x^2}$. La TI-92 dérive et factorise cette expression en $\frac{2e(x+2e)(x-(2V_0)^{\frac{1}{3}})(x^2+(2V_0)^{\frac{1}{3}}x+(2V_0)^{\frac{2}{3}})}{x^2}$ et ainsi les élèves peuvent reconnaître que la dérivée est du signe du facteur $(x-(2V_0)^{\frac{1}{3}})$.

Voici comment les élèves ont travaillé sur ce problème. Dans le cas numérique, ils ont rencontré les difficultés classiques à modéliser le volume de la cuve, puis employé des stratégies diverses d'étude de la fonction, combinant de façon variée les explorations numérico-graphiques et l'étude symbolique. Abordant la généralisation, les élèves n'ont pas eu de difficulté à étendre la modélisation. En revanche, ils ont été déconcertés par l'impossibilité d'obtenir une représentation graphique de la fonction. Le professeur a dû insister sur le fait qu'ils disposaient d'une méthode avec la dérivation. Mettre en œuvre cette méthode a été pour les élèves une véritable reconstruction: insécurisés par l'impossibilité d'explorer graphiquement les variations, ils se sont aidés du calcul symbolique pour progresser dans les étapes de la méthode.

Dans l'exemple précédent, la technique de calcul 'à la main' des dérivées inscrivait une praxéologie locale dans le cadre plus global de la dérivation symbolique. Ainsi, certaines praxéologies liées à l'utilisation d'un logiciel pour la mise en évidence de régularités restent locales si une technique habituelle ne vient pas aider à les insérer dans des rapports plus globaux. Dans le second exemple, l'utilisation de la technologie vient systématiser et généraliser une technique symbolique d'étude des variations (l'étude du signe de la dérivée par factorisation) dont les élèves n'avaient pas jusqu'alors réellement perçu l'intérêt, faute d'une tâche appropriée. Ainsi, des praxéologies basées sur des techniques 'habituelles' sont limitées par les objets que ces techniques peuvent manipuler. L'utilisation de la technologie permet d'amplifier et de systématiser ces techniques, donnant un sens plus général aux praxéologies.

7.3. *Les praxéologies nouvelles : un problème pour l'enseignant*

Dans cette intégration de techniques nouvelles à l'activité et à la réflexion de l'élève, l'action de l'enseignant est bien sûr essentielle. Il va devoir faire discuter les élèves sur les différentes façons de résoudre un problème, en s'intéressant non seulement aux aspects généraux, mais aussi à ceux qui sont directement liés à l'instrument, et en appuyant la réflexion théorique sur ces différents aspects (voir Lagrange (1999b) pour un exemple dans l'enseignement des débuts de l'analyse). En donnant une place à l'instrument dans la gestion quotidienne de la classe par l'enseignant, cette action participe du 'suivi individuel et collectif de la genèse instrumentale' dont Trouche (2000) souligne la nécessité dans sa conclusion. Elle ne va pas de soi pour l'enseignant, comme nous l'avons vu au paragraphe 3 à partir de l'étude sur l'utilisation de DERIVE dans l'enseignement secondaire français.

L'enseignant va aussi subir de plein fouet les bouleversements que l'apparition de techniques nouvelles peut produire dans ses stratégies d'enseignement. Une technique habituelle, même bien ancrée dans ses pratiques, ne va pas perdurer si les élèves disposent d'un instrument qui leur permet en un seul geste d'effectuer la même tâche. Elle devra se déplacer, comme nous l'avons vu pour la technique de dérivation d'un produit, afin d'assurer d'autres fonctions. Si, dans un enseignement donné, une technique marque très fortement la praxéologie sous-jacente, l'introduction de l'instrument va rendre obsolète la praxéologie toute entière.

Schneider (2000) donne un exemple frappant d'une situation de ce type. Dans un enseignement des fonctions logarithmiques, la résolution d'équations exponentielles de divers types était la tâche centrale, des techniques étaient progressivement construites pour cette résolution, et la définition et les propriétés des fonctions logarithmiques étaient abordées à partir de ces techniques. Les professeures qui assuraient cet enseignement se sont vite rendu compte que l'introduction d'une calculatrice à calcul formel résolvant en un seul geste toutes les équations rendait obsolète l'enseignement tout entier. Schneider (ibid.) montre bien le travail qui a été nécessaire à ces professeures pour reconstruire une praxéologie où les techniques graphiques, numériques et symboliques permises par la calculatrice donnent une approche totalement différente des fonctions logarithmiques. Ce qui est frappant dans cet exemple, c'est l'élaboration par les professeures de cette praxéologie, indubitablement un travail nécessaire pour elles-mêmes avant d'être un produit transmissible à leurs collègues sous forme d'un curriculum. En effet, davantage qu'une organisation des contenus mathématiques, une praxéologie est un ensemble de moyens dont dispose le professeur pour piloter l'activité des élèves et leur réflexion.

La création d'une nouvelle praxéologie impose donc nécessairement un travail par l'enseignant lui-même qui ne peut se réduire à l'application passive d'un curriculum 'venu d'en haut'.

8. Conclusion et perspectives

Le point de départ de cet article est le contraste entre une réalité où l'intégration de la technologie à l'enseignement est difficile, suppose une attention particulière notamment aux rapports que les élèves construisent à leur instrument, et des discours qui mettent l'accent sur les conditions nouvelles d'expérimentation et de développement d'un enseignement 'directement conceptuel' que permettrait la technologie. L'article montre que, en ne faisant pas l'analyse des conditions dans lesquelles une véritable expérimentation peut se développer, en opposant la 'compréhension' aux 'habiletés manipulatoires', ces discours occultent une dimension essentielle de l'activité mathématique, celles des techniques.

L'enseignement peut être vu comme l'initiation des élèves à des praxéologies, associant de façon cohérente des tâches, les techniques permettant de les accomplir et les théorisations qui permettent de comprendre et de maîtriser les techniques. Ainsi, l'introduction d'un instrument technologique, si elle tente de réduire la dimension technique de l'activité mathématique à un rôle accessoire, ne peut réellement contribuer à des acquisitions conceptuelles : les élèves vont rencontrer les pièges de la double référence et de l'expérimentation aveugle. En revanche, la prise en compte des techniques est, avec l'instrumentation, une des clés qui permettent de penser l'intégration de la technologie dans l'enseignement.

Les techniques 'nouvelles' sont marquées par l'immédiateté des gestes et la production d'observables nombreux que permet la technologie. Dans les techniques 'habituelles' en revanche, les gestes papier/crayon sont laborieux et doivent être économisés. L'intérêt de l'introduction d'un instrument peut être vu dans l'élaboration par les élèves de techniques nouvelles s'intégrant dans des praxéologies renouvelées.

Dans l'article, nous avons rencontré des techniques très variées : mise en relation de valeurs exactes et approchées permettant de relier des phénomènes graphiques et symboliques, construction progressive de techniques d'obtention des dérivées, manipulation d'expressions permettant de faire le lien entre des factorisations produites par DERIVE et les factorisations habituelles, mise en évidence et preuve de régularités dans la dérivation, méthode systématique d'étude de variations s'appliquant à des fonctions paramétriques et donnant une signification plus générale à la recherche d'optimalité[9].

Les techniques habituelles ne disparaissent pas de l'activité des élèves. La coordination de techniques habituelles et nouvelles permet d'inscrire les tâches auxquelles elles répondent dans des praxéologies évoluant du local vers le général. N'étant plus destinées à être rapidement 'routinisées', les techniques habituelles peuvent être plus facilement un support pour une réflexion théorique sur les objets qu'elles manipulent. Cela crée des opportunités pour le développement de praxéologies nouvelles.

La prise en compte des techniques habituelles et nouvelles permet ainsi de bien mesurer l'intérêt de l'intégration à l'enseignement d'instruments technologiques. Elle montre aussi que cette intégration ne va pas modifier miraculeusement les conditions d'apprentissage. Les techniques 'nouvelles' peuvent être plus faciles et plus rapides à mettre en œuvre que les techniques 'habituelles', mais leur élaboration et le travail de réflexion que suppose le passage aux théories n'en demandent pas moins aux élèves du temps et des efforts. Les difficultés rencontrées par l'enseignant lors de la création et de la mise en place de praxéologies nouvelles ne doivent pas être minimisées.

Il convient donc de voir la transposition didactique des 'mathématiques expérimentales' davantage comme un problème que comme une évidence. Les mathématiques expérimentales répondent en effet aux besoins de mathématiciens en données empiriques, besoins a priori étrangers aux préoccupations scolaires. Elle ont cependant pour conséquence de banaliser des instruments informatiques qui vont ainsi nécessairement s'introduire dans l'activité mathématique des élèves. L'usage de ces instruments ne saurait développer automatiquement chez les élèves une activité de même nature que celle des mathématiciens et donc il s'agit pour l'enseignement de rechercher les conditions pour que leur introduction soit réellement productive. L'approche par les techniques, développée dans cet article, est une façon de rechercher ces conditions. Elle montre bien quel travail nouveau est demandé à l'enseignant et à l'institution scolaire.

REMERCIEMENTS

Les expérimentations du logiciel DERIVE et la calculatrice TI-92 ont été menées grâce au soutien de Ministère Français de l'Education Nationale, DISTEN B2.

NOTES

1. J'emploie 'geste' ('gesture', en anglais) au sens étymologique d'action finalisée. Les gestes dans un logiciel prennent le plus souvent la forme de l'émission d'une commande, alors que les gestes 'non technologiques' utilisent le papier et le crayon. Je m'intéresse à la finalité dans laquelle le geste s'inscrit et à la réflexion qui le soutient, plus qu'à la commande ou à l'action papier/crayon.
2. Pour une analyse plus complète de cette situation, voir Lagrange (2000), p. 37.
3. "Dans les classes de lycée, l'emploi des calculatrices a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi (...) d'alimenter le travail de recherche (...)" Programme de Seconde.
4. Le terme 'skill' se traduit en français aussi bien par 'compétence' que par 'habileté'. Employer 'habileté' précédé d'un article indéfini n'est pas très courant en français. C'est pourquoi 'a skill' est souvent traduit par 'une compétence'. Il ne me semble cependant pas judicieux dans ce contexte de traduire 'skill' par 'compétence', car une compétence implique un certain degré de connaissance d'un domaine et donc ne s'oppose pas à une 'compréhension' de ce domaine.
5. Les rapports à une notion d'analyse, 'enactive', 'manipulative' et 'formel' sont décrits par Tall (1996). Je ne traduis pas les deux premiers termes car ils n'ont pas de correspondants directs en français. Le rapport 'enactive' aux phénomènes fonctionnels (dépendance, limites...) ou différentiels (accroissements, extremums...) se situe au niveau des connaissances quotidiennes ou construites antérieurement. Le rapport 'manipulative' est celui que l'analyse du lycée cherche à mettre en place. Il met en jeu le fonctionnement des objets, alors que le rapport 'formel' que les élèves rencontreront vraiment en entrant à l'université met l'accent sur leur définition et leur statut théorique.
6. Chevallard (ibid.) distingue deux niveaux au dessus de celui des techniques, le niveau des 'technologies' et celui des théories qui sont 'les technologies des technologies'. Dans l'analyse de Chevallard, 'technologie' a le sens étymologique de discours sur les techniques, un sens bien sûr différent de celui sous lequel j'emploie ce terme dans l'article.
7. Voir aussi Gascon (1998, p. 23) 'Modelo del proceso de estudio de una obra matematica'.
8. Les techniques sont liées aux instruments utilisés, ainsi l'on pourrait parler de 'techniques d'utilisation d'un logiciel' et de 'techniques papier/crayon'. Mais, plus que l'instrument lui-même, ce qui marque une technique, c'est le caractère des gestes qui la composent et la réflexion qu'ils impliquent. C'est pourquoi je considère des techniques 'nouvelles' marquées par l'immédiateté des gestes et la réflexion sur des observables nombreux, et des techniques 'habituelles' où les gestes sont laborieux et doivent être 'économisés' dans la résolution. L'adjectif 'habituel' peut bien sûr se comprendre comme 'relatif à l'habitus', c'est-à-dire à la manière d'être d'un individu dans un environnement social donné. Les techniques papier/crayon font partie de l'habitus des personnes formées aux mathématiques (mathématiciens, enseignants, parents...) alors que les techniques permises par l'informatique seront encore longtemps marginales dans cet habitus.
9. Lagrange (1999a, p. 66) montre aussi quelles tâches peuvent permettre à des élèves de développer des techniques de transformation d'expressions algébriques utilisant de façon réfléchie les fonctionnalités algébriques d'une calculatrice à calcul formel ainsi que le rôle que peuvent jouer ces techniques dans la compréhension des rapports entre différentes formes d'une expression.

REFERENCES

Artigue, M.: 1997, 'Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage', *Educational Studies in Mathematics* 33(2), 133–169.

Artigue, M. et Lagrange, J.B.: 1999, 'Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S', in Guin, D. (ed.), *Actes du Congrès 'Calculatrices symboliques et Géométriques dans l'enseignement des mathématiques'* , Mai 1998, IREM de Montpellier, pp. 15–38.

Borwein, J., Borwein, P., Girgensohn, R. et Parnes, S.: 1996, 'Making sense of experimental Mathematics', *The Mathematical Intelligencer* 18(4), Springer, New York, 12–17.

Chevallard, Y.: 1999, 'L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221–266.

Chevallard, Y.: 1985, *La Transposition Didactique*, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Davenport, J., Siret, Y. et Tournier, E.: 1986, *Calcul Formel*. Masson.

Douady, R.: 1986, 'Jeux de cadres et dialectique outil / objet', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5–31.

Duval, R.: 1996, 'Quel cognitif retenir en didactique?', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(3), 349–382.

Fey, J.: 1989, 'Technology and mathematics education, a survey of recent developments and important problems', *Educational Studies in Mathematics* 20, 237–272.

Gascón, J.: 1998, 'Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina cientifica', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1), 7–33.

Guin, D. et Delgoulet, J.: 1996, 'Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de Seconde', *IREM de Montpellier.*

Guin, D. et Trouche, L.: 1999a, 'The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators', *The International Journal of Computers in Mathematics Education* 3(3).

Heid, M.K.: 1988, 'Resequencing skills and concepts in applied calculus', *Journal for Research in Mathematics Education* 19(1), 3–25.

Juge, G. (ed.): 1994, 'Les outils de calcul formel dans l'enseignement des Mathématiques', *Actes de l'Université d'été*, IREM de basse Normandie.

Kieran, C. et Wagner, S.: 1989, 'The research agenda conference on algebra: background and issues', in Kieran et Wagner (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, NCTM-LEA, pp. 1–10.

Lagrange, J.B.: 1996, 'Analysing actual use of a computer algebra system in the teaching and learning of mathematics', *International DERIVE Journal* 3(3), 91–108.

Lagrange, J.B.: 1999a, 'Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: a two year classroom experiment with the TI-92', *International Journal for Computer Algebra in Mathematics Education* 6(2), 143–165.

Lagrange, J.B.: 1999b, 'Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus', *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4(1), 51–81.

Lagrange, J.B.: 2000, *Approches Didactique et Cognitive d'un Instrument Technologique dans l'Enseignement Le Cas du Calcul Formel en Lycée*, Document pour l'Habilitation à Diriger les Recherches, Université Paris VII.

Mercier, A.: 1996, 'L'algébrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires', in R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian (eds.), *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques.* IREM Clermont Ferrand, pp. 345–361.

Monaghan, J., Sun, S. et Tall, D.: 1994, 'Construction of the limit concept with a computer algebra system', in *Proceedings of the 8^{th} Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Lisbon, Portugal, Vol. III, pp. 279–286.

Mounier, G. et Aldon, G.: 1996, 'A problem story: factorisations of xn-1', *International DERIVE Journal* 3(3), 51–61.

Pérez Fernández, J.: 1998, 'Los systemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas', in B. Hodgson et al. (eds.), *Selected Lectures of the 8th International Congress on Mathematical Education*, SAEM THALES, pp. 345–368.

Pozzi, S.: 1994, 'Algebraic reasoning and CAS: Freeing students from syntax?', in H. Heugl and B. Kutzler (eds.), *DERIVE in Education*, Chartwell-Bratt, Bromley.

Rachlin, S.: 1989, 'The research agenda in algebra: a curriculum development perspective', in Kieran and Wagner (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, NCTM-LEA, 257–265.

Schneider, E.: 2000, 'Teacher experiences with the use of a CAS in a mathematics classroom', *International Journal for Computer Algebra in Mathematics Education* 7(2), 119–141.

Tall, D.: 1996, 'Functions and calculus', in A.J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic, pp. 289–325.

Trouche, L.: 2000, 'La parabole du gaucher et la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes', *Educational Studies in Mathematics* 41, 239–264.

Trouche, L. et al.: 1998, Faire des Mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques, *IREM Montpellier*.

Wain, G.: 1994, 'Some technical problems in the use of DERIVE with school pupils', *International DERIVE Journal*, 1(1), 49–56.

Institut universitaire de formation des maîtres 153,
rue de St Malo 35043 Rennes Cedex France,
E-mail: lagrange@univ-rennes1.fr,
Tel/Fax: 33 2 99 64 84 12