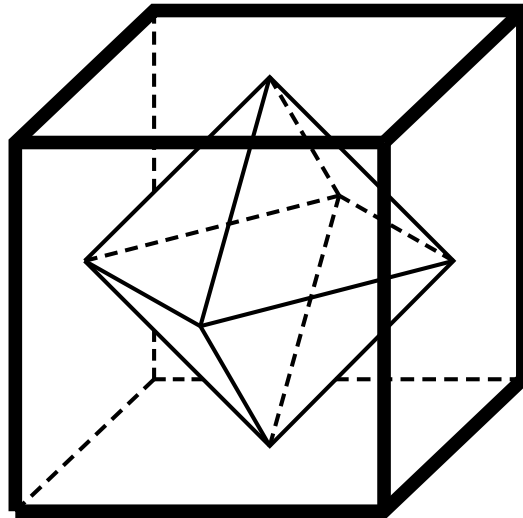


---

# Geometría en Olimpiadas de Matemáticas

---



por

---

**Jesús Jerónimo Castro**

---

Universidad Autónoma de Guerrero

Facultad de Matemáticas

*2010*



---

# **Geometría en Olimpiadas de Matemáticas**

---

**Jesús Jerónimo Castro**

**Jesús Jerónimo Castro**  
Facultad de Matemáticas,  
Universidad Autónoma de Guerrero.

# Introducción

---

Aquí va el rollo.



# Notación básica

---

A lo largo del libro se usará la siguiente notación:

|                 |  |
|-----------------|--|
| $\triangle ABC$ | el triángulo de vértices $A$ , $B$ y $C$ |
| $ ABC $         | área del triángulo $\triangle ABC$       |
| $ ABCD $        | área del cuadrilátero $ABCD$             |
| $AB$            | el segmento de extremos $A$ y $B$        |
| $AB$            | la línea por los puntos $A$ y $B$        |
| $AB$            | la longitud del segmento $AB$            |
| $\angle A$      | ángulo de vértice $A$                    |
| $\angle BAC$    | ángulo formado por $BA$ y $CA$           |
| $\widehat{AB}$  | el arco de $A$ a $B$                     |
| $m_A$           | la mediana desde el vértice $A$          |





---

# Contenido

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>                       | <b>III</b> |
| <b>Notación básica</b>                    | <b>v</b>   |
| <b>1. Conceptos y teoremas básicos</b>    | <b>1</b>   |
| 1.1. Ángulos entre paralelas. . . . .     | 1          |
| 1.1.1. Problemas . . . . .                | 4          |
| 1.2. Ángulos en circunferencias . . . . . | 5          |
| 1.2.1. Problemas . . . . .                | 10         |
| 1.3. El Teorema de Tales . . . . .        | 12         |
| 1.3.1. Problemas . . . . .                | 15         |
| 1.4. Triángulos semejantes . . . . .      | 16         |
| 1.4.1. Problemas . . . . .                | 25         |

---

|   |           |
|---|-----------|
| 1.5. Cuadriláteros cíclicos. . . . .                                  | 27        |
| 1.5.1. Problemas . . . . .  | 34        |
| 1.6. Potencia de un punto con respecto a una circunferencia . . . . . | 38        |
| 1.6.1. Problemas . . . . .  | 45        |
| 1.7. Teorema de Pitágoras . . . . .                                   | 49        |
| 1.7.1. Problemas . . . . .  | 53        |
| 1.8. Areas de triángulos y cuadriláteros . . . . .                    | 56        |
| 1.8.1. Problemas . . . . .  | 60        |
| 1.9. Teorema de Ptolomeo . . . . .                                    | 63        |
| 1.9.1. Problemas . . . . .  | 66        |
| <br>  |           |
| <b>2. Puntos y rectas notables en el triángulo</b>                    | <b>69</b> |
| 2.1. Las medianas y el gravicentro . . . . .                          | 69        |
| 2.1.1. Problemas . . . . .  | 72        |
| 2.2. Las bisectrices y el incentro . . . . .                          | 74        |
| 2.2.1. Problemas . . . . .  | 78        |
| 2.3. Las alturas y el ortocentro . . . . .                            | 82        |
| 2.3.1. Problemas . . . . .  | 85        |
| 2.4. Las mediatrices y el circuncentro . . . . .                      | 86        |
| 2.4.1. Problemas . . . . .  | 88        |
| 2.5. Las simedianas . . . . .   | 90        |

|   |            |
|---|------------|
| 2.5.1. Problemas . . . . .                          | 95         |
| 2.6. Circunferencias ex-inscritas . . . . .         | 98         |
| 2.6.1. Problemas . . . . .                          | 100        |
| 2.7. Teoremas de Ceva y Menelao . . . . .           | 102        |
| 2.7.1. Problemas . . . . .                          | 106        |
| 2.8. Teoremas de Euler y Simson . . . . .           | 108        |
| 2.8.1. Problemas . . . . .                          | 111        |
| <br>  |            |
| <b>3. Algunas estrategias en Geometría</b>          | <b>113</b> |
| 3.1. Prolongar segmentos . . . . .                  | 114        |
| 3.1.1. Problemas . . . . .                          | 117        |
| 3.2. Trazar perpendiculares y paralelas . . . . .   | 119        |
| 3.2.1. Problemas . . . . .                          | 121        |
| 3.3. Trazar tangentes y cuerdas comunes . . . . .   | 123        |
| 3.3.1. Problemas . . . . .                          | 127        |
| 3.4. Construir un ángulo . . . . .                  | 129        |
| 3.4.1. Problemas . . . . .                          | 130        |
| <br>  |            |
| <b>4. Problemas variados</b>                        | <b>133</b> |
| 4.1. Problemas . . . . .                            | 134        |
| <br>  |            |
| <b>5. Sugerencias para los problemas propuestos</b> | <b>139</b> |

**Bibliografía****147****Índice****147**

---

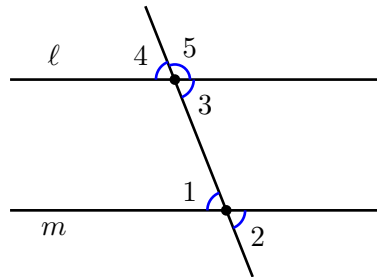
# Capítulo 1

## Conceptos y teoremas básicos

---

### 1.1. Ángulos entre paralelas.

Consideremos un par de *líneas paralelas* ( $l$  y  $m$ ) en el plano. Ahora, supongamos que una línea corta a  $l$  y  $m$  y observemos los ángulos que ésta forma con ellas. Los ángulos mantienen las siguientes relaciones:



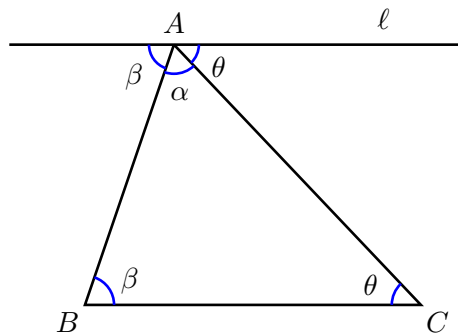
(a)  $\angle 1 = \angle 2$  y se llaman ángulos *opuestos por el vértice*,

- (b)  $\angle 1 = \angle 3$  y se llaman ángulos *alternos internos*,
- (c)  $\angle 1 = \angle 4$  y se llaman ángulos *correspondientes*,
- (d)  $\angle 2 = \angle 4$  y se llaman ángulos *alternos externos*.

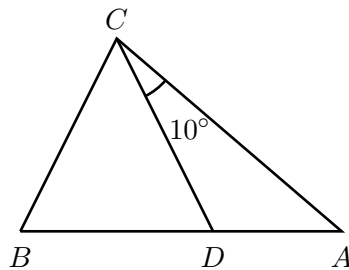
Además, tenemos que  $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$  y decimos que  $\angle 4$  y  $\angle 5$  son *suplementarios*. Aprovechando estas relaciones de ángulos podemos demostrar (justificar mediante argumentos válidos) el siguiente teorema básico:

**Teorema 1.1.1** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ .*

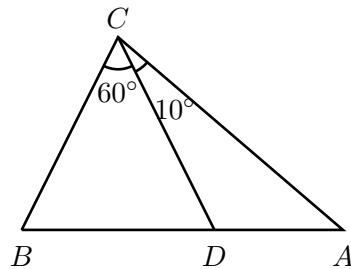
*Demostración.* Se traza un línea  $\ell$ , paralela a  $BC$ , por el vértice  $A$ . De esta manera obtenemos las igualdades de ángulos marcados en la figura. Como sabemos que un ángulo llano mide  $180^\circ$ , tenemos que  $\alpha + \theta + \beta = 180^\circ$ .  $\square$



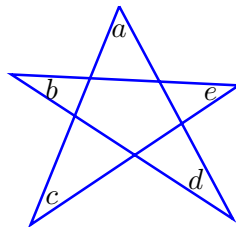
**Ejemplo 1.1.1** *En el triángulo  $\triangle ABC$ ,  $\angle CAB + \angle ABC = 110^\circ$ , y  $D$  es un punto sobre el segmento  $AB$  tal que  $CD = CB$  y  $\angle DCA = 10^\circ$ . Calcula el valor del ángulo  $\angle CAB$ .*



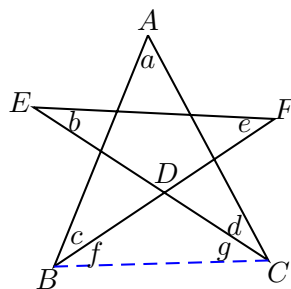
*Solución.* La suma de los ángulos interiores del triángulo  $\triangle ABC$  es  $180^\circ$ . Como  $\angle A + \angle B = 110^\circ$ , entonces  $\angle BCA$  debe ser  $70^\circ$ . Si  $\angle DCA = 10^\circ$ ,  $\angle BCD = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$ . Además, el triángulo  $\triangle BCD$  es isósceles, con  $CD = CB$ , de modo que  $\angle DBC = \angle CDB$ . Ahora, la suma de los ángulos interiores del triángulo  $BCD$  es  $180^\circ$ , de donde  $\angle DBC = \angle CDB = 60^\circ$ . Por último, en el triángulo  $\triangle ACD$ , el ángulo exterior  $\angle CDB$  es la suma de los ángulos interiores opuestos  $\angle A$  y  $\angle DCA$ . Por lo tanto,  $\angle A = \angle CDB - \angle DCA = 60^\circ - 10^\circ = 50^\circ$ .



**Ejemplo 1.1.2** En la siguiente figura, ¿cuánto vale la suma de los ángulos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$ ?

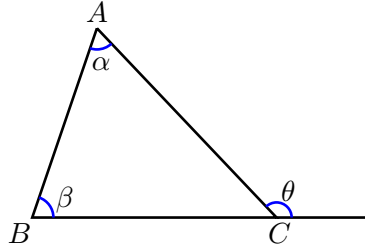


*Solución.* Considerando el triángulo  $\triangle ABC$  obtenemos que  $a + c + f + g + d = 180^\circ$ , pero de los triángulos  $\triangle BCD$  y  $\triangle FED$  obtenemos que  $f + g = b + e$ . Por lo tanto,  $a + b + c + d + e = 180^\circ$ .

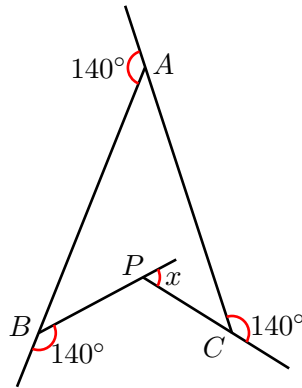


## 1.1.1. Problemas

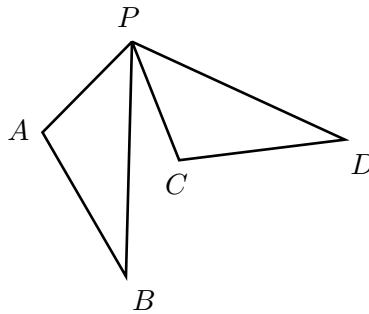
**Problema 1.1** Encuentra cuánto vale el ángulo exterior  $\theta$  en la siguiente figura si son conocidos los ángulos  $\alpha = 62^\circ$  y  $\beta = 71^\circ$ .



**Problema 1.2** Encuentra cuánto vale el ángulo  $x$  en la siguiente figura.



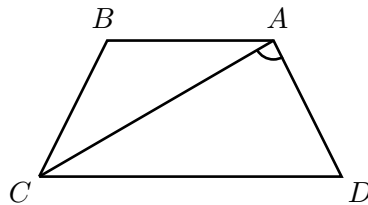
**Problema 1.3** En la figura, los triángulos  $\triangle PAB$  y  $\triangle PCD$  son idénticos. Si el ángulo  $\angle APC = 67^\circ$  y el ángulo  $\angle CPD = 38^\circ$ , ¿cuánto mide el ángulo  $\angle BPC$ ?





**Problema 1.4** Encuentra cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono convexo <sup>1</sup> de  $n$  vértices.

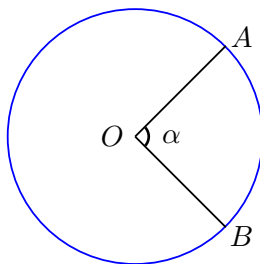
**Problema 1.5** El trapecio isósceles  $ABCD$  es tal que  $AD = AB = BC = 1$  y  $DC = 2$ , donde  $AB$  es paralelo a  $DC$ . ¿Cuánto mide el ángulo  $\angle CAD$ ?



## 1.2. Ángulos en circunferencias

Dado un ángulo y una circunferencia, podemos calcular el valor de este ángulo dependiendo de los arcos que intersecta en ésta. La forma de calcular el ángulo dependerá del lugar donde se encuentre el vértice y de la forma en que sus lados intersecten la circunferencia. Veamos cada uno de ellos y la manera de calcularlos:

**Definición 1.2.1** Un ángulo central es el que tiene su vértice en el centro de un círculo y su valor es igual al arco que intersecta medido en radianes <sup>2</sup>, es decir  $\alpha = \widehat{AB}$ . <sup>3</sup>

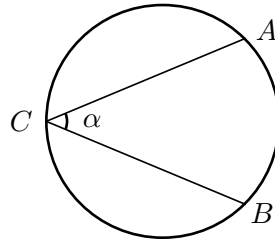


<sup>1</sup>Una figura se dice que es convexa, si para cualesquiera dos puntos en ella, el segmento que los une está totalmente contenido en la figura.

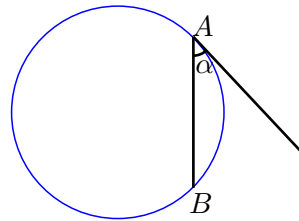
<sup>2</sup>Un radián es la medida de un ángulo central que intersecta un arco que tiene longitud igual a un radio de la circunferencia.

<sup>3</sup>Con  $\widehat{XY}$  denotamos al arco de la circunferencia entre los puntos  $X$  y  $Y$ .

**Definición 1.2.2** Un ángulo inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y los lados que lo forman son cuerdas de la circunferencia. Su valor es igual a la mitad del arco que interseca, es decir  $\alpha = \widehat{AB}/2$ .

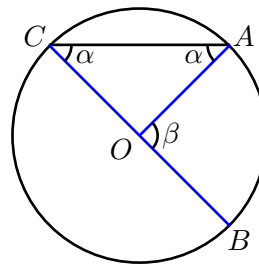


**Definición 1.2.3** Un ángulo semi-inscrito es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y está formado por una línea tangente y una secante. Su valor es igual a la mitad del arco que interseca, es decir  $\alpha = \widehat{AB}/2$ .



**Teorema 1.2.1** El valor de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que interseca el mismo arco.

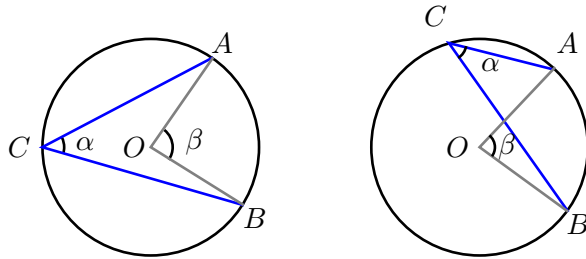
*Demostración.* Probaremos esto para el caso cuando uno de los lados del ángulo coincide con un diámetro:



En la figura anterior, sean  $CB$  un diámetro,  $\angle ACB = \alpha$  (ángulo inscrito) y  $\angle AOB = \beta$  (ángulo central). Debemos probar que  $\alpha = \frac{\beta}{2}$ . Observemos que

tanto  $OA$  como  $OC$  son radios de la circunferencia, entonces el triángulo  $\triangle AOC$  es isósceles, esto es  $\angle ACO = \angle CAO = \alpha$ . Sabemos que  $\beta = \angle AOB = \angle ACO + \angle CAO = \alpha + \alpha$ , por lo tanto  $\beta = 2\alpha$ .  $\square$

Ahora, faltaría demostrar lo anterior para los casos mostrados en las siguientes figuras. Esto puede hacerse fácilmente utilizando el caso que ya hemos probado, pero esto se deja como ejercicio.



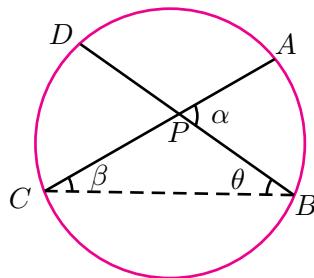
Sin embargo, el vértice de un ángulo no siempre está en alguna de las posiciones antes mencionadas, por lo que debemos encontrar una forma de calcular la medida de un ángulo cuyo vértice esté dentro o fuera del círculo en cuestión.

**Teorema 1.2.2** *La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan dentro de un círculo es equivalente a la semisuma de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir*

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}.$$

*Demostración.* Trazamos el segmento  $CB$  y de esta manera obtenemos el triángulo  $\triangle PCB$ . Como  $\alpha = \beta + \theta$  tenemos

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}. \quad \square$$

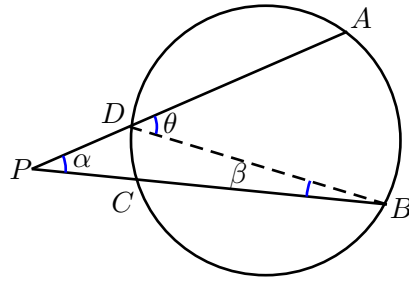


**Teorema 1.2.3** *La magnitud del ángulo entre dos líneas que se cortan fuera de un círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que cortan dichas líneas. Es decir*

$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}.$$

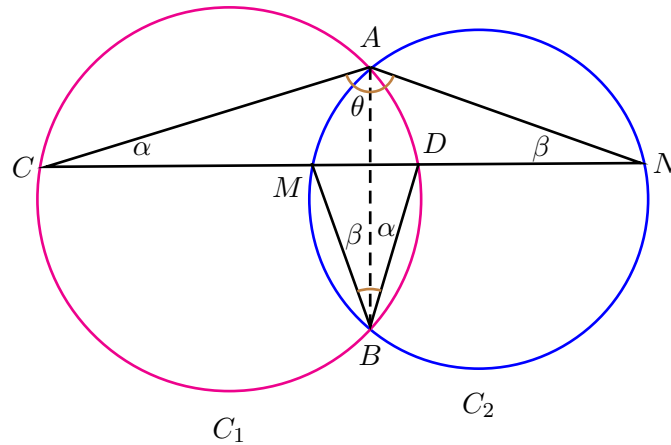
*Demostración.* Se traza el segmento  $DB$ , formándose así el triángulo  $\triangle PDB$ . Como  $\theta = \alpha + \beta$ , tenemos que  $\alpha = \theta - \beta$ , entonces

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}. \quad \square$$



Ahora, veremos un ejemplo en el cual se mostrará la utilidad de los anteriores teoremas.

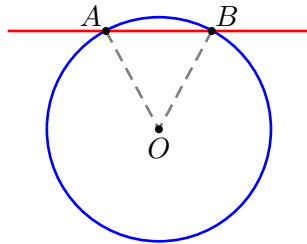
**Ejemplo 1.2.1** *Las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$ . Se traza una recta  $l$  que corta a  $C_1$  en  $C$  y  $D$ , y a  $C_2$  en  $M$  y  $N$ , de tal manera que  $A$  y  $B$  quedan en distintos lados de  $l$ . Demuestra que  $\angle CAN + \angle MBD = 180^\circ$ .*



*Demostración.* Una recomendación muy útil cuando tenemos dos circunferencias que se cortan en dos puntos es *trazar la cuerda común*. Trazamos entonces  $AB$ . Tenemos que  $\angle ABD = \angle ACD = \alpha$ , ya que ambos son ángulos inscritos en  $C_1$  los cuales intersectan el arco  $\widehat{AD}$ . De la misma manera,  $\angle ABM = \angle ANM = \beta$ , ya que ambos son ángulos inscritos en  $C_2$ . Por otro lado, si hacemos  $\angle CAN = \theta$ , en el triángulo  $\triangle ACN$  tenemos que  $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ .  $\square$

**Ejemplo 1.2.2** Demuestra que el radio trazado hacia el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

*Demostración.* Sea  $A$  un punto sobre la circunferencia  $\Gamma$  y  $OA$  el radio trazado hacia éste. Por el punto  $A$  trazamos la recta  $\ell$  perpendicular a  $OA$ . Claramente  $\ell$  es tangente a  $\Gamma$ . En caso contrario, supongamos que  $\ell$  intersecta a  $\Gamma$ , además de en  $A$ , en otro punto  $B$ . Como  $OB$  también es radio, tenemos que el triángulo  $\triangle OAB$  es isósceles, de lo cual tenemos que  $\angle ABO = \angle BAO = 90^\circ$ . Claramente esto es una contradicción, ya que entonces la suma de los ángulos del triángulo  $\triangle OAB$  sería mayor que  $180^\circ$ . Por lo tanto, la recta  $\ell$  es tangente a la circunferencia en el punto  $A$ .  $\square$

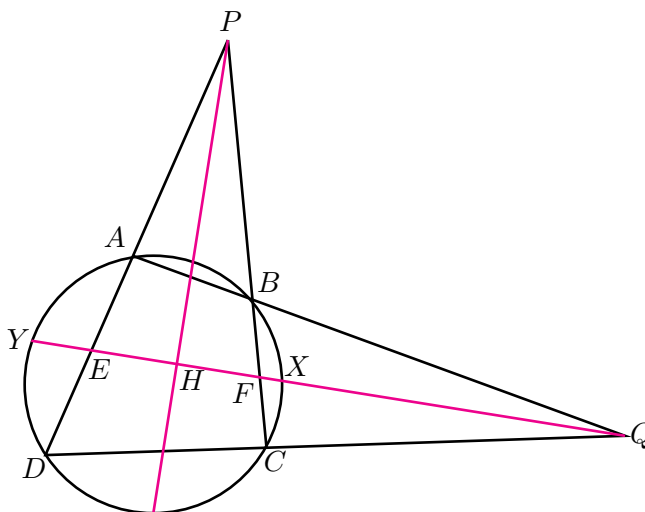


**Ejemplo 1.2.3** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero el cual tiene sus cuatro vértices sobre una circunferencia. Las líneas  $AB$  y  $DC$  se intersectan en un punto  $Q$  y las líneas  $DA$  y  $CB$  se intersectan en un punto  $P$ . Demuestra que las líneas que bisectan los ángulos  $\angle DPC$  y  $\angle AQD$  son mutuamente perpendiculares.

*Demostración.* Sea  $H$  el punto de intersección de las dos bisectrices mencionadas. Sean  $Y$  y  $X$  los puntos donde la bisectriz del  $\angle AQD$  intersecta a la circunferencia y sean  $E$  y  $F$  los puntos donde esta bisectriz intersecta a los lados  $AD$  y  $BC$ . Probar que  $\angle PHQ = 90^\circ$  es equivalente a probar que el triángulo  $\triangle PEF$  es

isósceles. Para probar esto utilizaremos una técnica que resulta muy útil al resolver problemas y a la cual denominaremos *ir hacia atrás*. La idea es suponer válido el resultado que queremos demostrar e ir observando que otros resultados también serían válidos. Se hace esto hasta que lleguemos a un resultado el cual sea fácil de demostrar o sea conocido por nosotros de alguna manera. Una vez hecho esto tratamos de regresarnos siguiendo los pasos en orden inverso. Aplicando esta técnica al problema tenemos lo siguiente:

$\triangle PEF$  isósceles  $\implies \angle PEF = \angle PFE \implies \widehat{DY} + \widehat{AB} + \widehat{BX} = \widehat{YA} + \widehat{AB} + \widehat{XC}$   
 $\implies \widehat{DY} + \widehat{BX} = \widehat{YA} + \widehat{XC} \implies \widehat{DY} - \widehat{XC} = \widehat{YA} - \widehat{BX}$ . Esto último es cierto debido a que  $QY$  es la bisectriz del ángulo  $\angle AQD$ . El regreso se lleva a cabo sin dificultad alguna en este caso.  $\square$



### 1.2.1. Problemas

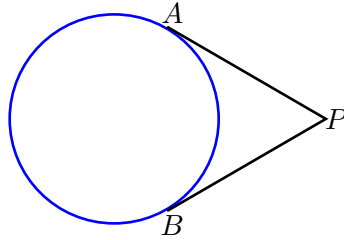
**Problema 1.6** Demuestra que dos líneas paralelas cualesquiera que intersectan una circunferencia, cortan arcos iguales entre ellas.

**Problema 1.7** Demuestra que el valor de un ángulo semi-inscrito es igual al valor de un ángulo inscrito que intersecte el mismo arco.

**Problema 1.8** Una circunferencia ha sido dividida arbitrariamente en cuatro

partes, y los puntos medios de los arcos obtenidos se han unido con segmentos de rectas. Demuestra que entre estos segmentos dos serán perpendiculares entre sí.

**Problema 1.9** En la siguiente figura  $PA$  y  $PB$  son tangentes a la circunferencia. Demuestra que  $PA = PB$ .



**Problema 1.10** Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto  $A$ .  $BC$  es una tangente común externa. Demuestra que  $\angle BAC = 90^\circ$ .

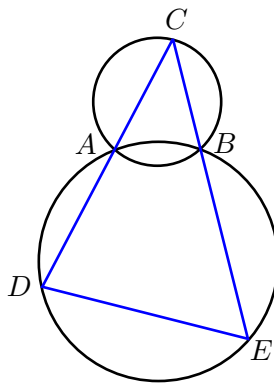
**Problema 1.11** A una circunferencia se le han trazado dos líneas tangentes paralelas las cuales la tocan en los puntos  $M$  y  $N$ . Se traza una tercer tangente la cual corta a las tangentes anteriores en los puntos  $K$  y  $L$ . Sea  $O$  el centro de la circunferencia. Demuestra que  $\angle KOL = 90^\circ$ .

**Problema 1.12** Uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia coincide con un diámetro. Demuestra que el triángulo es un triángulo rectángulo.

**Problema 1.13** Demuestra que la razón entre la longitud del lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.<sup>4</sup>

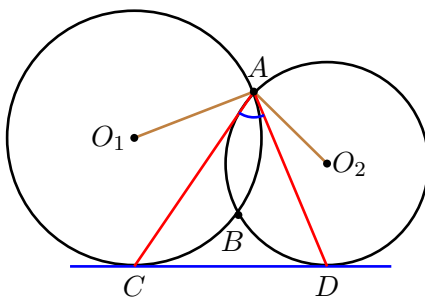
**Problema 1.14** Dos circunferencias se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$  como se muestra en la figura. Se escoge un punto arbitrario  $C$  en la primer circunferencia y se trazan los rayos  $CA$  y  $CB$ , los cuales intersectan la segunda circunferencia de nuevo en los puntos  $D$  y  $E$ , respectivamente. Demuestra que la longitud del segmento  $DE$  no depende de la elección del punto  $C$ .

<sup>4</sup>Con esto hemos probado que  $\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C} = 2R$ , la cual es conocida como la Ley de Senos.



**Problema 1.15** Dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$  se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$ , como se muestra en la figura. La línea  $CD$  es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle O_1AO_2.$$

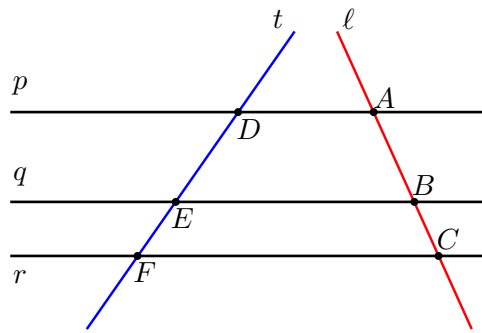


### 1.3. El Teorema de Tales

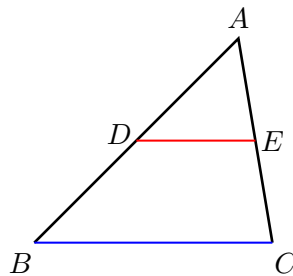
**Teorema 1.3.1** Si una línea transversal corta a tres paralelas y los segmentos que quedan entre éstas se dividen en la razón  $m : n$ , entonces cualquier otra transversal que corte a estas paralelas también quedará dividida en la razón  $m : n$ .

Por ejemplo, sean  $p, q, r$ , tres rectas paralelas. Si una línea  $\ell$  corta a las rectas en los puntos  $A, B$  y  $C$ , de manera tal que  $AB : BC = 2 : 1$ , y otra línea  $t$  corta a las rectas paralelas en  $D, E$  y  $F$ , también tendremos que  $DE : EF = 2 : 1$ .

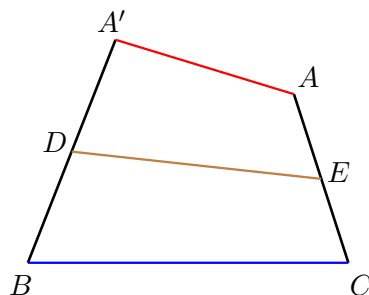




El recíproco del teorema de Tales es válido cuando es aplicado a dos segmentos que comparten un extremo. Por ejemplo, si dos segmentos  $AB$  y  $AC$  comparten un vértice  $A$ , el segmento que une los puntos medios de éstos es paralelo al segmento que une los otros dos extremos. Es decir, sean  $D$  y  $E$  los puntos medios de  $AB$  y  $AC$ , respectivamente; como  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ , entonces por el recíproco del Teorema de Tales tenemos que  $DE$  es paralelo a  $BC$ .

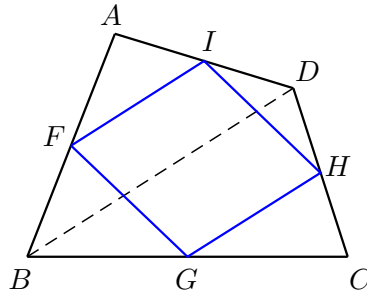


Sin embargo, debemos tener cuidado cuando los segmentos no comparten un extremo. Por ejemplo, en la siguiente figura  $D$  y  $E$  son los puntos medios de  $A'B$  y  $AC$ , respectivamente, y sin embargo  $DE$  no es paralelo ni a  $BC$  ni a  $A'A$ .

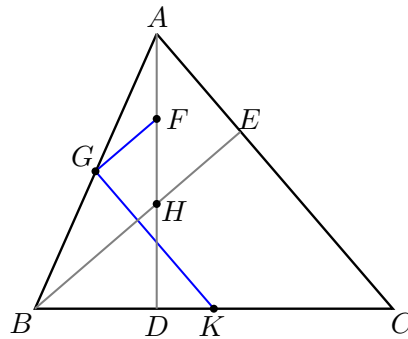


**Ejemplo 1.3.1** Sean  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$  los puntos medios de los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , respectivamente. Demuestra que el cuadrilátero  $FGHI$  es un paralelogramo<sup>5</sup>.

*Solución.* Tracemos la diagonal  $BD$ . Como  $F$  e  $I$  son los puntos medios de  $AB$  y  $AD$ , respectivamente, tenemos que  $FI$  es paralelo a  $BD$ ; también, como  $G$  y  $H$  son los puntos medios de  $BC$  y  $CD$ , respectivamente, entonces  $GH$  es paralelo a  $BD$ . De aquí tenemos que  $FI$  es paralelo a  $GH$ . Análogamente, podemos demostrar que  $FG$  es paralelo a  $IH$ . Como el cuadrilátero  $FGHI$  tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos, entonces es un paralelogramo.



**Ejemplo 1.3.2** En la siguiente figura,  $BE$  y  $AD$  son alturas del  $\triangle ABC$  las cuales se intersectan en un punto  $H$ . Sean  $F$ ,  $G$  y  $K$  los puntos medios de los segmentos  $AH$ ,  $AB$  y  $BC$ , respectivamente. Demuestra que  $\angle FGK$  es un ángulo recto.



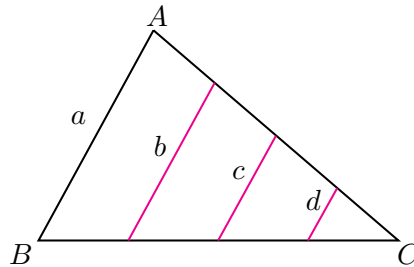
*Demostración.* Dado que  $G$  es el punto medio de  $AB$  y  $F$  el punto medio de  $AH$ , por el Teorema de Tales tenemos que  $GF$  es paralelo a  $BH$ . Análogamente,

<sup>5</sup>Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que cada par de lados opuestos son paralelos y de la misma longitud.

se prueba que  $GK$  es paralelo a  $AC$ . Por otro lado, como el ángulo entre  $BH$  y  $AC$  es  $90^\circ$ , también tenemos que el ángulo entre  $GF$  y  $GK$  es  $90^\circ$ .  $\square$

### 1.3.1. Problemas

**Problema 1.16** En la siguiente figura los segmentos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son paralelos y dividen al lado  $BC$  en 4 segmentos iguales. Si  $a = 10$ , encuentra la suma  $a + b + c + d$ .



**Problema 1.17** Sea  $ABCD$  un paralelogramo en el que  $L$  y  $M$  son puntos medios de  $AB$  y  $CD$ , respectivamente. Demuestra que los segmentos  $LC$  y  $AM$  dividen la diagonal  $BD$  en tres segmentos iguales.

**Problema 1.18** Demuestra que las diagonales en un paralelogramo se cortan en su punto medio.

**Problema 1.19** Sea  $AM$  la mediana trazada hacia el lado  $BC$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Prolongamos  $AM$  más allá del punto  $M$  y tomamos un punto  $N$  de tal manera que  $AN$  es el doble de  $AM$ . Demuestra que el cuadrilátero  $ABNC$  es un paralelogramo.

**Problema 1.20** Demuestra que el segmento de línea, que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, bisecta el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.

**Problema 1.21** En un paralelogramo  $ABCD$  se escogen los puntos  $E$  y  $F$  sobre la diagonal  $AC$  de manera que  $AE = FC$ . Si  $BE$  se extiende hasta intersectar  $AD$  en  $H$ , y  $BF$  se extiende hasta intersectar  $DC$  en  $G$ , demuestra que  $HG$  es paralelo a  $AC$ .

**Problema 1.22**  $AM$  es la mediana hacia el lado  $BC$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Se toma un punto  $P$  sobre  $AM$ .  $BP$  se extiende hasta intersectar  $AC$  en  $E$ , y  $CP$  se extiende hasta intersectar  $AB$  en  $D$ . Demuestra que  $DE$  es paralelo a  $BC$ .

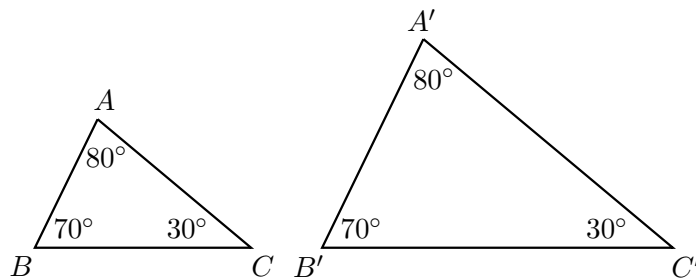
**Problema 1.23** Sobre los lados  $AB$  y  $AC$  de un triángulo  $\triangle ABC$  se construyen hacia afuera los cuadrados  $ABNM$  y  $CAPQ$ . Sea  $D$  el punto medio del lado  $BC$ . Demuestra que  $PM = 2 \cdot AD$ .

## 1.4. Triángulos semejantes

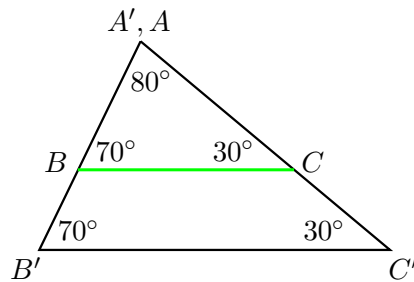
En esta sección analizaremos el concepto de *semejanza* de triángulos. Enseguida daremos una definición, que aunque no es formal, nos da la idea intuitiva de este concepto.

**Definición 1.4.1** Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma (aunque no necesariamente el mismo tamaño), es decir, si tienen sus tres ángulos iguales.

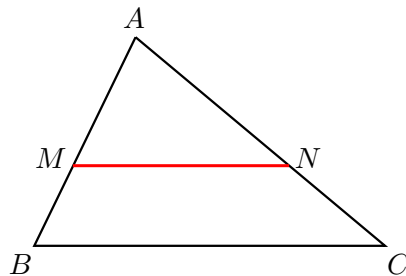
Por ejemplo, los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A'B'C'$  son semejantes:



Si nosotros movemos el triángulo  $\triangle ABC$  hasta que el vértice  $A$  concida con el vértice  $A'$ , y además lo hacemos de tal manera que el lado  $AB$  quede exactamente encima del lado  $A'B'$ , tendremos la siguiente figura:



Aquí podemos observar que los lados  $BC$  y  $B'C'$  son paralelos, y de manera inversa, si nosotros trazamos una línea paralela a uno de los lados de un triángulo de manera que ésta corte a los dos lados restantes, entonces esta línea paralela determinará un triángulo semejante al triángulo original.



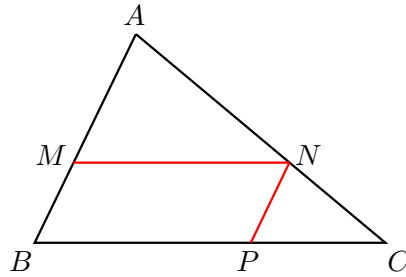
Utilizando lo anterior y el teorema de Tales , tenemos la siguiente proporción:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{NA},$$

sumando 1 en ambos lados tenemos

$$\frac{BM}{MA} + 1 = \frac{CN}{NA} + 1 \implies \frac{BM + MA}{MA} = \frac{CN + NA}{NA} \implies \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}.$$

Si trazamos una paralela a  $AB$  la cual pase por el punto  $N$ , tendremos el paralelogramo  $MNPB$ :



Utilizando nuevamente el teorema de Tales tenemos que

$$\frac{CP}{PB} = \frac{CN}{NA}.$$

Nuevamente sumamos 1 en ambos lados y obtenemos que

$$\frac{CB}{PB} = \frac{CA}{NA},$$

pero como  $PB = NM$  tenemos que

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN}.$$

Juntando los resultados anteriores tenemos que

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN},$$

es decir, si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados son proporcionales. Probaremos ahora el recíproco de este enunciado, es decir, probaremos que si dos triángulos tienen sus tres lados respectivos proporcionales, entonces son semejantes. Para esto, consideremos que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$  tienen sus lados proporcionales, es decir, que se cumple que

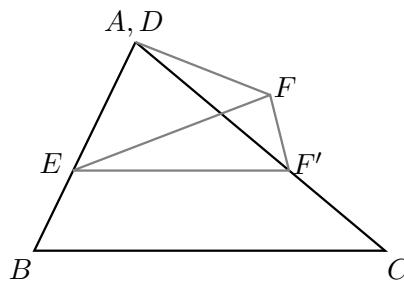
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \lambda.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\lambda > 1$ . Coloquemos el triángulo  $\triangle DEF$  de manera que el vértice  $D$  coincida con el vértice  $A$  y que el lado  $DE$  esté sobre el lado  $AB$ . Si tenemos que  $\angle EDF = \angle BAC$ , entonces por el Teorema de Tales tenemos que  $EF$  es paralelo a  $BC$  y por tanto, el triángulo  $\triangle DEF$  es semejante al triángulo  $\triangle ABC$ . Supongamos ahora que  $\angle EDF \neq$

$\angle BAC$ . Sea  $F'$  el punto donde la paralela a  $BC$  por  $E$  intersecta al lado  $AC$ ; como sabemos que  $\triangle DEF' \sim \triangle ABC$  entonces se cumple que

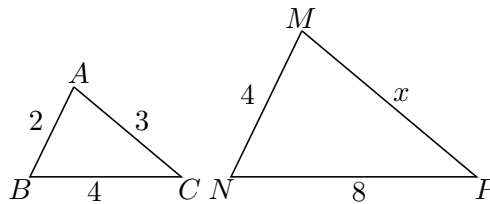
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF'} = \frac{BC}{EF'}.$$

De aquí se obtiene que  $EF' = EF$  y que  $DF' = DF$ , es decir, los triángulos  $\triangle EF'F$  y  $\triangle DF'F$  son isósceles. Si trazamos las alturas de estos triángulos desde los vértices  $E$  y  $D$  sobre el segmento  $F'F$ , tenemos que ambas caen sobre el punto medio de  $F'F$ , pero entonces tenemos dos líneas perpendiculares a  $F'F$  las cuales son distintas. Esto es claramente una contradicción, por lo tanto  $F' = F$  y  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ .



Veamos algunos ejemplos donde utilicemos lo anterior:

**Ejemplo 1.4.1** Tenemos dos triángulos semejantes  $\triangle ABC$  y  $\triangle MNP$ . Sabemos que sus lados son iguales a los valores marcados en la siguiente figura, encuentra cuánto vale  $x$ .

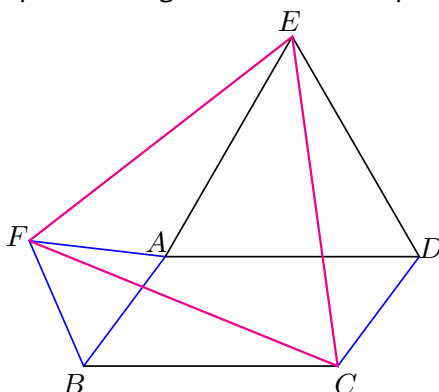


*Solución.* Como tenemos que los lados de ambos triángulos son proporcionales, entonces:

$$\frac{x}{3} = \frac{8}{4}$$

con esto llegamos a que el valor de  $x$  es 6.

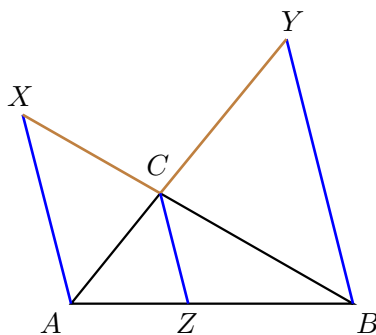
**Ejemplo 1.4.2** En la siguiente figura,  $ABCD$  es un paralelogramo. Sobre los lados  $AB$  y  $AD$  se dibujan los triángulos equiláteros  $\triangle ABF$  y  $\triangle ADE$ , respectivamente. Demuestra que el triángulo  $\triangle FCE$  es equilátero.



*Solución.* Cuando dos triángulos, además de ser semejantes, tienen las longitudes de sus lados iguales se dice que son *congruentes*. En la figura anterior, tenemos que  $\angle FAE + 120^\circ + \angle BAD = 360^\circ$ , entonces  $\angle FAE = 240^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BAD + 60^\circ$ . Como  $\angle FBC = 180^\circ - \angle BAD + 60^\circ$ , entonces  $\angle FAE = \angle FBC$ . Además, tenemos que  $FA = FB$  y  $AE = BC$ , esto implica que el triángulo  $\triangle FAE$  es congruente al triángulo  $\triangle FBC$  y por lo tanto  $FE = FC$ . De manera análoga podemos demostrar que  $EC = FE$  y así concluimos que el triángulo  $\triangle FEC$  es equilátero.

**Ejemplo 1.4.3** Sea  $Z$  un punto sobre el lado  $AB$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Una línea a través de  $A$  paralela a  $CZ$  intersecta a  $BC$  en  $X$ . Una línea a través de  $B$  paralela a  $CZ$  intersecta a  $AC$  en  $Y$ . Demuestra que

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}.$$





*Demostración.* Primero reescribimos la expresión que queremos demostrar como

$$1 = \frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY}.$$

Tenemos que el triángulo  $\triangle BCZ$  es semejante al triángulo  $\triangle BXA$ , de aquí obtenemos

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{BZ}{AB}.$$

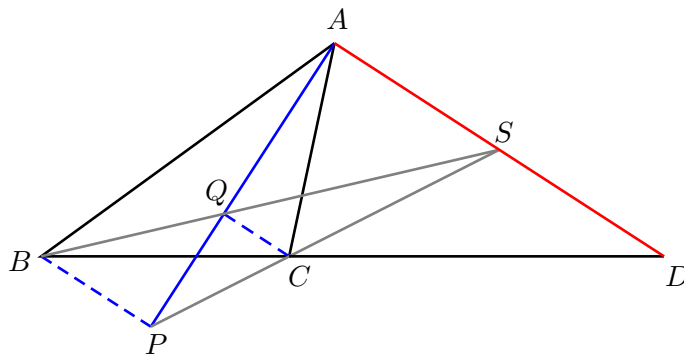
De manera análoga, de la semejanza entre los triángulos  $\triangle ACZ$  y  $\triangle AYB$ , tenemos que

$$\frac{CZ}{BY} = \frac{AZ}{AB}.$$

Sumando estas dos expresiones que hemos obtenido tenemos que

$$\frac{CZ}{AX} + \frac{CZ}{BY} = \frac{BZ}{AB} + \frac{AZ}{AB} = \frac{AZ + ZB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1. \quad \square$$

**Ejemplo 1.4.4** Dado un triángulo  $\triangle ABC$ , sea  $l$  una línea que pasa por el vértice  $A$  la cual divide el ángulo  $\angle BAC$  en dos partes iguales. Sean  $P$  y  $Q$  las proyecciones desde  $B$  y  $C$  sobre  $l$ , respectivamente, y sea  $D$  un punto sobre la línea  $BC$  de tal manera que  $DA$  es perpendicular a  $l$ . Demuestra que  $AD$ ,  $BQ$  y  $CP$  concurren.



*Demostración.* Sea  $S$  el punto donde la línea  $BQ$  interseca a  $AD$ . Como  $AD$ ,  $CQ$  y  $BP$  son paralelas, tenemos que

$$\frac{SQ}{SB} = \frac{AQ}{AP}.$$

Además, como los triángulos  $\triangle ABP$  y  $\triangle ACQ$  son semejantes, tenemos que

$$\frac{QC}{BP} = \frac{AQ}{AP},$$

de aquí obtenemos que los triángulos  $\triangle SQC$  y  $\triangle SBP$  son semejantes y comparten el vértice  $S$ , por lo tanto,  $P$ ,  $C$  y  $S$  son colineales.  $\square$

En el siguiente ejemplo podemos observar cómo la geometría y el álgebra, en ocasiones, se mezclan en armonía para dar como resultado demostraciones con gran belleza.

**Ejemplo 1.4.5** *Expresa el lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.*

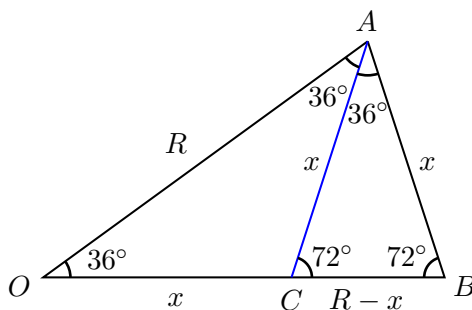
*Solución.* Sean  $AB = x$  uno de los lados del decágono,  $O$  el centro de la circunferencia y  $R$  el radio de ésta. Sea  $C$  un punto sobre el lado  $OB$  de tal manera que  $\angle OAC = \angle CAB = 36^\circ$ . De esta manera, obtenemos el triángulo  $\triangle CAB$ , el cual es semejante al triángulo  $\triangle OAB$ . Utilizando la proporción entre los lados tenemos:

$$\frac{x}{R} = \frac{R-x}{x}.$$

Esto da lugar a la siguiente ecuación (aquí se acabó la geometría y le toca el turno al álgebra):

$$x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

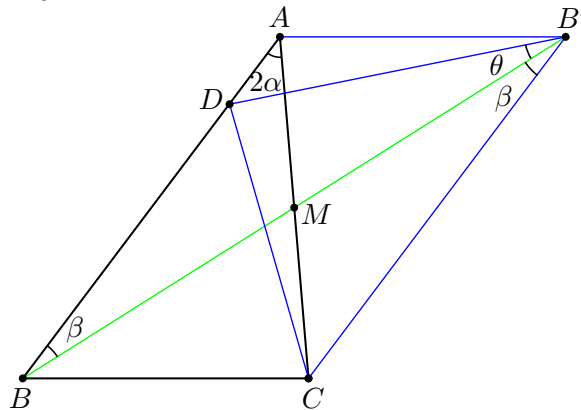
la cual tiene como raíces a  $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$  y  $-R\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ . Claramente, la segunda no puede ser solución de nuestro problema, ya que no existen longitudes negativas. Por lo tanto, la solución es  $R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ .



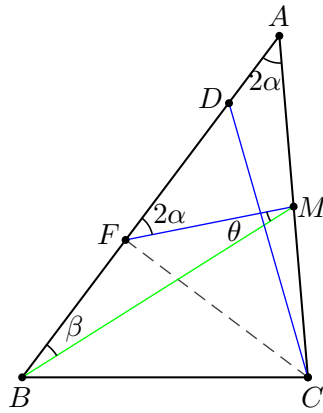
Hasta este momento, podría quedarnos la idea de que un problema posee sólo una solución y se necesita de *mucha suerte* para encontrarla. Normalmente esto no es cierto, como podemos apreciarlo en el siguiente ejemplo para el cual damos tres soluciones (esencialmente) distintas:

**Ejemplo 1.4.6** Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $AB > AC > BC$ . Sea  $D$  un punto sobre el lado  $AB$  de tal manera que  $CD = BC$ , y sea  $M$  el punto medio del lado  $AC$ . Demuestra que  $BD = AC$  si y sólo si  $\angle BAC = 2\angle ABM$ .

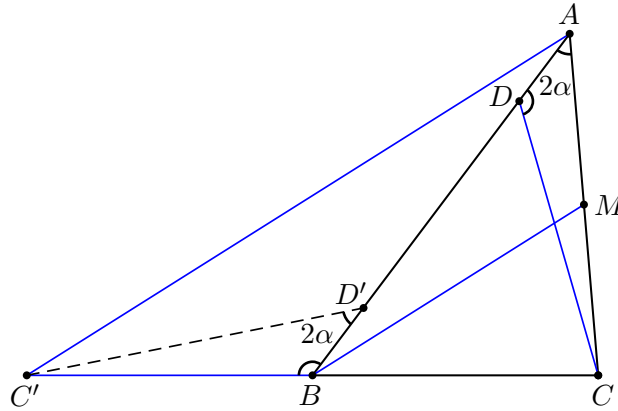
*Primera Solución.* Sea  $\angle BAC = 2\alpha$ . Prolongamos el segmento  $BM$  hasta un punto  $B'$  tal que  $BM = MB'$ . De este modo obtenemos que el cuadrilátero  $AB'CB$  es un paralelogramo, de donde se sigue que  $B'C = AB$ . También sabemos que  $DC = BC = AB'$ , entonces el cuadrilátero  $ADCB'$  es un trapecio isósceles. De aquí se sigue que  $DB' = AC$ . Con estas tres igualdades de segmentos obtenemos que el triángulo  $B'CD$  es congruente al triángulo  $ABC$ . Se sigue que  $\angle DB'C = 2\alpha$ . Entonces se cumple que  $BD = DB' = AC$  si y sólo si  $\angle DB'B = \angle DBB'$ , lo cual es cierto si y sólo si  $\angle DB'B = \angle BB'C = \alpha$ . Es decir,  $BD = AC$  si y sólo si  $\angle BAC = 2\angle ABM$ .  $\square$



*Segunda Solución.* Tracemos primero la altura  $CF$  desde  $C$ . Sean  $2\alpha = \angle BAC$ ,  $\beta = \angle ABM$  y  $\theta = \angle FMB$ . Como el triángulo  $\triangle CFA$  es un triángulo rectángulo, tenemos que  $FM = AC/2$ , además, también tenemos que  $\angle MFA = 2\alpha$ . Por otro lado, como el ángulo  $\angle MFA$  es exterior al triángulo  $\triangle MFB$ , tenemos que  $\beta + \theta = 2\alpha$ . De todo esto obtenemos que  $BD = AC$  si y sólo si  $BF = FM$ , que a su vez es cierto si y sólo si  $\beta = \theta$ , es decir, si y sólo si  $\beta = \alpha$ .  $\square$



*Tercera Solución.* Sea  $C'$  el punto donde la paralela a  $MB$  por  $A$  intersecta a la línea  $BC$ , y sea  $D'$  el punto sobre el lado  $AB$  tal que  $AD' = BD$ . Observemos que  $C'B = BC = CD$  y que  $BD' = AD$ , además, como el triángulo  $\triangle BCD$  es isósceles tenemos que  $\angle C'BD' = \angle ADC$ . Con esto, obtenemos que el triángulo  $\triangle C'BD'$  es congruente al triángulo  $\triangle CDA$ , de donde se sigue que  $C'D' = AC$ . Denotemos por  $2\alpha$  a los ángulos  $\angle DAC$  y  $\angle C'D'B$ .



Supongamos primero que  $BD = AC$ , es decir,  $AD' = AC$ . Entonces,  $C'D' = AD'$  y de aquí obtenemos que  $\angle AC'D' = \angle C'AD'$ , además, como  $\angle AC'D' + \angle C'AD' = \angle C'D'B = 2\alpha$  obtenemos que  $\angle C'AD' = \alpha$ . Como  $C'A$  y  $BM$  son paralelas, concluimos que  $\angle ABM = \angle C'AD' = \alpha$ .

Ahora, supongamos que  $\angle ABM = \alpha$ , entonces se sigue que  $\angle C'AD' = \alpha$ . Como  $\angle C'D'B = 2\alpha = \angle AC'D' + \angle C'AD' = \angle AC'D' + \alpha$ , tenemos que  $\angle AC'D' = \alpha$ , es decir, el triángulo  $\triangle AC'D'$  es isósceles. De aquí obtenemos

que  $AD' = C'D' = AC$ , y como  $AD' = BD$ , concluimos que  $BD = AC$ .  $\square$

### 1.4.1. Problemas

**Problema 1.24** Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de las diagonales.

**Problema 1.25** En un triángulo  $\triangle ABC$ , sobre el lado  $BC$  se toma un punto  $D$  de tal manera que  $\angle BAD = \angle ACB$ . Demuestra que  $(AB)^2 = BD \cdot BC$ .

**Problema 1.26** En un triángulo  $\triangle ABC$ , la altura  $CE$  es extendida hasta  $G$  de tal manera que  $EG = AF$ , donde  $AF$  es la altura trazada hacia  $BC$ . Una línea a través de  $G$  y paralela a  $AB$  intersecta  $CB$  en  $H$ . Demuestra que  $HB = AB$ .

**Problema 1.27** Dos circunferencias se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$ . Por el punto  $A$  se han trazado los segmentos  $AC$  y  $AD$ , cada uno de los cuales, siendo cuerda de una circunferencia, es tangente a la segunda circunferencia. Demuestra que  $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$ .

**Problema 1.28** En un trapecio  $ABCD$  ( $AB$  paralelo a  $DC$ ) sea  $AB = a$  y  $DC = b$ . Sean  $M$ ,  $N$ ,  $P$  y  $Q$  los puntos medios de  $AD$ ,  $BD$ ,  $AC$  y  $BC$ , respectivamente. Demuestra que

$$(a) \quad MQ = \frac{a+b}{2}$$

$$(b) \quad NP = \frac{|a-b|}{2}$$

**Problema 1.29** En un trapecio  $ABCD$  ( $AB$  paralelo a  $DC$ ) sea  $AB = a$  y  $DC = b$ . Supongamos que  $\angle ADC + \angle BCD = 90^\circ$ . Sean  $M$  y  $N$  los puntos medios de  $AB$  y  $DC$ , respectivamente. Demuestra que

$$MN = \frac{b-a}{2}.$$

**Problema 1.30** En un trapezio  $ABCD$  ( $AB$  paralelo a  $DC$ )  $M$  es el punto medio del lado  $DC$ . Supongamos que  $AM$  intersecta a  $BD$  en  $E$ . A través de  $E$ , se traza una línea paralela a  $DC$  la cual corta a  $AD$ ,  $AC$  y  $BC$ , en los puntos  $H$ ,  $F$  y  $G$ , respectivamente. Demuestra que  $HE = EF = FG$ .

**Problema 1.31** Demuestra que las rectas que unen los centros de los cuadrados, construidos exteriormente sobre los lados de un paralelogramo, forman también un cuadrado.

**Problema 1.32** En un cuadrilátero  $ABCD$ . Sobre las rectas  $AC$  y  $BD$  se toman los puntos  $K$  y  $M$  de manera que  $BK$  es paralelo a  $AD$  y  $AM$  es paralelo a  $BC$ . Demuestra que  $KM$  es paralelo a  $CD$ .

**Problema 1.33** Sea  $M$  el punto medio de la base  $AC$  de un triángulo isósceles  $\triangle ABC$ .  $H$  es un punto en  $BC$  tal que  $MH$  es perpendicular a  $BC$ .  $P$  es el punto medio del segmento  $MH$ . Demuestra que  $AH$  es perpendicular a  $BP$ .

**Problema 1.34** Se da un triángulo  $\triangle ABC$ . En la recta que pasa por el vértice  $A$  y es perpendicular al lado  $BC$ , se toman dos puntos  $A_1$  y  $A_2$  de modo que  $AA_1 = AA_2 = BC$  ( $A_1$  es más próximo a la recta  $BC$  que  $A_2$ ). De manera análoga, en la recta perpendicular a  $AC$ , que pasa por  $B$ , se toman los puntos  $B_1$  y  $B_2$  de modo que  $BB_1 = BB_2 = AC$ . Demuestra que los segmentos  $A_1B_2$  y  $A_2B_1$  son iguales y mutuamente perpendiculares.

**Problema 1.35** Por el punto de intersección de las diagonales de un cuadrilátero  $ABCD$  se traza una recta que corta a  $AB$  en el punto  $M$  y a  $CD$  en el punto  $N$ . Por  $M$  y  $N$  se trazan las rectas paralelas a  $CD$  y  $AB$ , respectivamente, que cortan a  $AC$  y a  $BD$  en los puntos  $E$  y  $F$ . Demuestra que  $BE$  es paralelo a  $CF$ .

**Problema 1.36** Sea  $E$  un punto arbitrario sobre el lado  $AC$  del triángulo  $\triangle ABC$ . Por el vértice  $B$  tracemos una recta arbitraria  $l$ . Por  $E$ , se traza una recta paralela a  $BC$  la cual corta  $l$  en el punto  $N$ . También por  $E$ , se traza una recta paralela a  $AB$  la cual corta  $l$  en el punto  $M$ . Demuestra que  $AN$  es paralelo a  $CM$ .

**Problema 1.37** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo equilátero y sea  $\Gamma$  el semicírculo que tiene a  $BC$  como diámetro y que es exterior al triángulo. Demuestra que si una línea que pasa por  $A$  trisecta a  $BC$ , entonces también trisecta al arco  $\Gamma$ .

## 1.5. Cuadriláteros cíclicos.

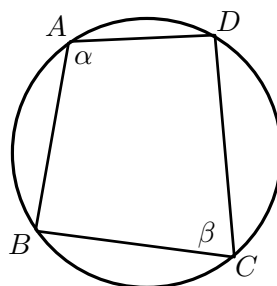
Un hecho muy conocido en geometría es que por cualesquiera tres puntos no alineados pasa exactamente una circunferencia. ¿Pero qué podemos decir si consideramos cuatro puntos en lugar de tres? Como es de esperarse, no siempre existirá una circunferencia que pase por los cuatro puntos dados. Por ejemplo, consideremos la circunferencia que pasa por tres puntos dados (la cual es única),  $A, B, C$ , y agreguemos un cuarto punto,  $D$ , el cual no esté sobre la circunferencia. Claramente, no existe una circunferencia que pase por estos cuatro puntos, ya que en particular pasaría por  $A, B, C$ , y por la manera en que escogimos a  $D$ , ésta no puede pasar por  $D$ . De aquí vemos que los cuadriláteros que posean una circunferencia que pase por sus vértices deben ser en cierta forma *especiales*. A tales cuadriláteros se les acostumbra llamar *cuadriláteros cíclicos*.

**Definición 1.5.1** Un cuadrilátero que está inscrito en una circunferencia, es decir, sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia se dice que es un cuadrilátero cíclico.

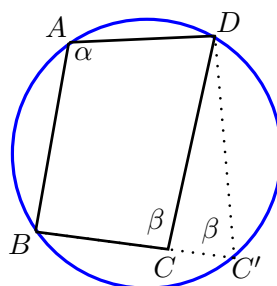
Veremos que dos ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico suman  $180^\circ$ , más aún, para que un cuadrilátero sea cíclico es suficiente con verificar que dos ángulos opuestos sumen  $180^\circ$ .

**Teorema 1.5.1** Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si la suma de dos ángulos opuestos es igual a  $180^\circ$ .

*Demostración.* Para probar esto, primero vamos a suponer que el cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico. Tenemos que el  $\angle DAB = \frac{\widehat{BD}}{2}$  y  $\angle BCD = \frac{\widehat{DB}}{2}$ , y como  $\widehat{BD} + \widehat{DB} = 360^\circ$  (midiendo los ángulos en grados), tenemos que  $\angle DAB + \angle BCD = \alpha + \beta = 180^\circ$ .



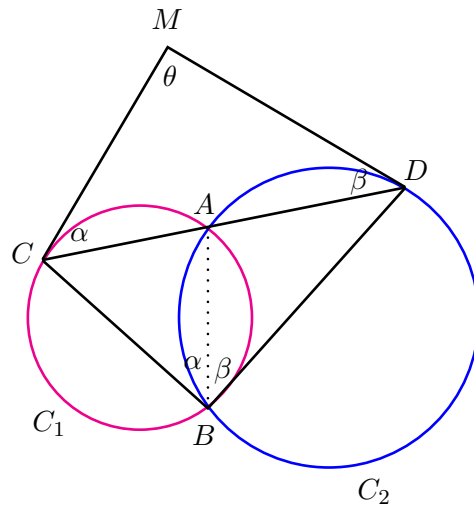
Ahora supongamos que  $\angle DAB + \angle BCD = \alpha + \beta = 180^\circ$ . Tracemos la circunferencia que pasa por los vértices  $D, A$  y  $B$  y supongamos que ésta no pasa por el vértice  $C$ . Prolonguemos  $DC$  hasta que intersecte a la circunferencia en  $C'$ . Como el cuadrilátero  $ABC'D$  es cíclico tenemos que  $\angle DAB + \angle BC'D = 180^\circ$ , esto quiere decir que  $\angle BC'D = \angle BCD = \beta$  y entonces  $DC$  es paralelo a  $DC'$ , lo cual es una contradicción ya que líneas paralelas no se intersectan. Entonces  $C$  coincide con  $C'$  y por lo tanto el cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico.  $\square$



Ahora vamos a hacer un ejemplo donde utilicemos el teorema anterior:

**Ejemplo 1.5.1** *Las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$ . Por el punto  $A$  se traza una recta que corta a las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  en los puntos  $C$  y  $D$ , respectivamente. Por los puntos  $C$  y  $D$  se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersectan en el punto  $M$ . Demuestra que el cuadrilátero  $MCBD$  es cíclico.*

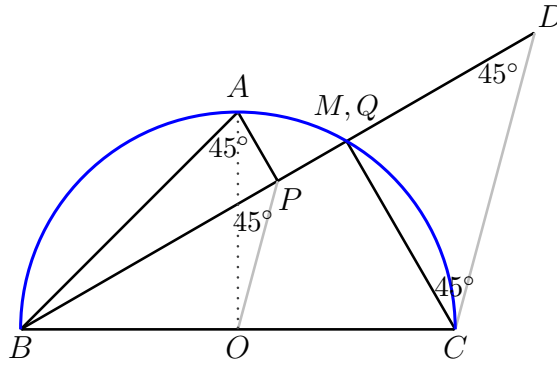




*Solución.* Queremos probar que  $\angle CMD + \angle DBC = 180^\circ$ . Tracemos la cuerda común  $AB$ . Tenemos que  $\angle MCA = \angle CBA = \alpha$  ya que uno es ángulo semi-inscrito y el otro es ángulo inscrito, ambos en la circunferencia  $C_1$ . Análogamente se demuestra que  $\angle MDA = \angle DBA = \beta$  (en  $C_2$ ). Tenemos que  $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ , por ser los ángulos internos del triángulo  $\triangle MCD$ , pero como  $\angle CBD = \alpha + \beta$  tenemos que  $\angle CMD + \angle DBC = 180^\circ$ .  $\square$

**Ejemplo 1.5.2** Sea  $BC$  el diámetro de un semicírculo y sea  $A$  el punto medio del semicírculo. Sea  $M$  un punto sobre el arco  $\widehat{AC}$ . Sean  $P$  y  $Q$  los pies de las perpendiculares desde  $A$  y  $C$  a la línea  $BM$ , respectivamente. Demuestra que  $BP = PQ + QC$ .

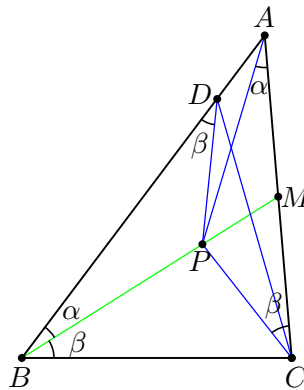
*Solución.* Consideremos el punto  $D$  sobre el rayo  $BP$  de tal manera que  $QD = QC$ , entonces  $PD = PQ + QD = PQ + QC$ . Bastará entonces probar que  $P$  es el punto medio de  $BD$ . Primero, tenemos que  $Q$  y  $M$  coinciden, entonces  $\angle QDC = \angle QCD = 45^\circ$ , y como  $O$  es el punto medio de  $BC$ , ahora tendremos que demostrar que  $OP$  es paralelo a  $DC$ . Para esto, bastará demostrar que  $\angle BPO = 45^\circ$ . Como  $AO \perp BC$  y  $\angle APB = 90^\circ$  tenemos que  $APOB$  es cíclico y de aquí que  $\angle BPO = \angle BAO = 45^\circ$ , por lo tanto  $BP = PQ + QC$ .  $\square$



Aunque el siguiente ejemplo ya fue demostrado en la sección anterior, damos una demostración más utilizando cuadriláteros cíclicos.

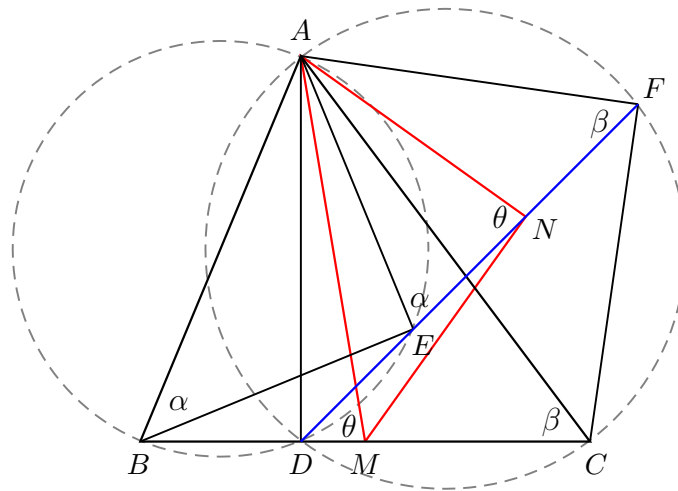
**Ejemplo 1.5.3** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo tal que  $AB > AC > BC$ . Sea  $D$  un punto sobre el lado  $AB$  de tal manera que  $CD = BC$ , y sea  $M$  el punto medio del lado  $AC$ . Demuestra que  $BD = AC$  si y sólo si  $\angle BAC = 2\angle ABM$ .

*Demostración.* Sea  $P$  un punto sobre  $BM$  tal que  $\angle PAM = \angle MBA = \alpha$ . Los triángulos  $\triangle MAP$  y  $\triangle MBA$  comparten el ángulo  $\angle BMA$  y por construcción  $\angle PAM = \angle MBA$ , por tanto, son semejantes. Así que  $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MA}$ . Como  $MA = CM$ , se tiene que  $\frac{CM}{MP} = \frac{MB}{CM}$ . Entonces, los triángulos  $\triangle MCP$  y  $\triangle MBC$  tienen lados proporcionales, además comparten el ángulo  $\angle CMB$ . Se sigue que son semejantes. De aquí obtenemos que  $\angle MCP = \angle MBC = \beta$ .



Ahora, observemos que  $\angle APC = 180 - (\alpha + \beta)$ . Por otro lado, como  $\alpha + \beta = \angle ABC = \angle CDB$ , se tiene que  $\angle ADC = 180 - (\alpha + \beta) = \angle APC$ . Obtenemos que el cuadrilátero  $CPDA$  es cíclico. Esto implica que  $\angle PDB = \angle PCA = \beta$ . Se sigue que los triángulos  $\triangle CPA$  y  $\triangle DPB$  son semejantes. Entonces,  $BD = AC \Leftrightarrow \triangle CPA \cong \triangle DPB \Leftrightarrow PA = PB \Leftrightarrow \angle PAB = \angle PBA = \angle PAC \Leftrightarrow \angle A = 2\angle MBA$ .  $\square$

**Ejemplo 1.5.4** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo y sea  $D$  el pie de la altura desde  $A$ . Sean  $E$  y  $F$  sobre una línea que pasa por  $D$  de tal manera que  $AE$  es perpendicular a  $BE$ ,  $AF$  es perpendicular a  $CF$ ,  $E$  y  $F$  son diferentes de  $D$ . Sean  $M$  y  $N$  los puntos medios de  $BC$  y  $EF$ , respectivamente. Demuestra que  $AN$  es perpendicular a  $NM$ .

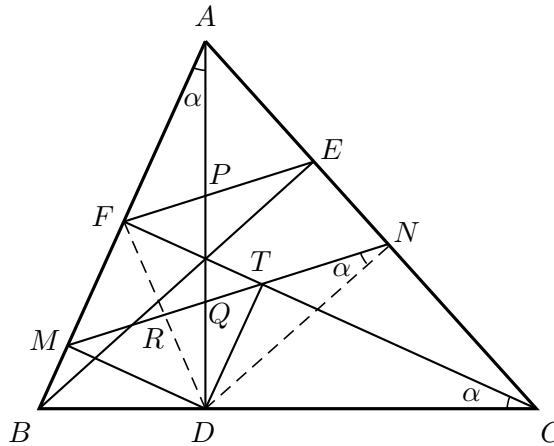


*Demostración.* Tenemos que  $E$  está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle ABD$  y  $F$  está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle ADC$ , entonces los cuadriláteros  $ABDE$  y  $ADCF$  son cíclicos. De lo anterior tenemos que  $\angle ABD = \angle AEF = \alpha$  y  $\angle ACD = \angle AFE = \beta$  lo cual implica que  $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ . Tanto  $M$  como  $N$  son puntos medios de los lados correspondientes  $BC$  y  $EF$ , respectivamente, y esto implica que  $\angle AMB = \angle ANE = \angle AND = \theta$ , es decir, el cuadrilátero  $ADMN$  es cíclico y por lo tanto  $\angle ANM = 90^\circ$ .  $\square$

**Ejemplo 1.5.5** Sean  $\triangle ABC$  un triángulo acutángulo y  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  sus alturas. La circunferencia con diámetro  $AD$  corta a los lados  $AB$  y  $AC$  en  $M$  y

$N$ , respectivamente. Sean  $P$  y  $Q$  los puntos de intersección de  $AD$  con  $EF$  y  $MN$ , respectivamente. Demuestra que  $Q$  es el punto medio de  $PD$ .

*Demostración.* Como  $AD$  es diámetro, los ángulos  $\angle AMD$  y  $\angle AND$  son rectos. El triángulo  $\triangle ABD$  es entonces semejante al  $\triangle ADM$  y de aquí,  $AM \cdot AB = AD^2$ . Análogamente,  $AN \cdot AC = AD^2$ . Por lo tanto,  $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ . Esto implica que los triángulos  $\triangle ANM$  y  $\triangle ABC$  son semejantes, ya que además de tener una pareja de lados proporcionales también comparten el ángulo  $\angle BAC$ . Se sigue que  $BCNM$  es un cuadrilátero cíclico.

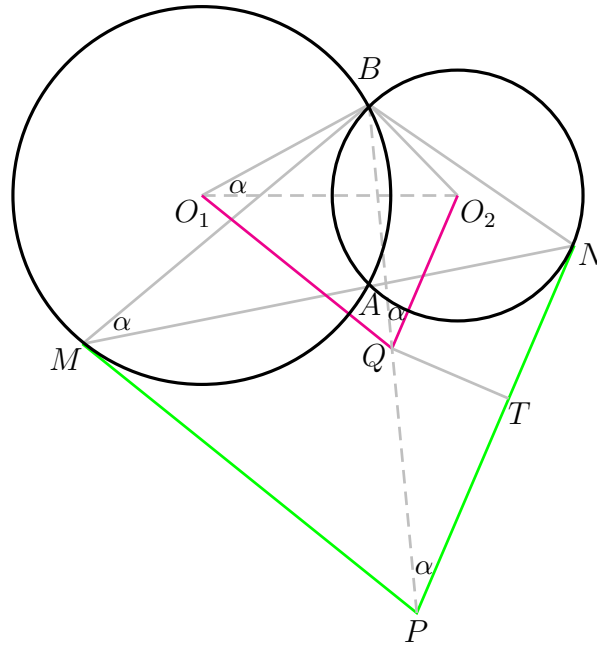


Por otro lado, como  $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ , el cuadrilátero  $BFEC$  también es cíclico. Entonces  $\gamma = \angle ACB = \angle AMN = \angle AFE$ . De aquí,  $MN$  es paralela a  $FE$ . Además, si  $T$  es el punto de intersección de  $MN$  con  $CF$ ,  $\angle CTN = \angle FTM = 90^\circ - \angle TMF = 90^\circ - \gamma = \angle CDN$ . Por lo tanto, el cuadrilátero  $DTNC$  es cíclico y entonces  $\angle DTC = \angle DNC = 90^\circ$ . El cuadrilátero  $DMFT$  tiene 3 ángulos rectos, luego el cuarto ángulo también es recto, es decir, se trata de un rectángulo.

Tracemos  $FR$  paralela a  $PQ$  con  $R$  sobre  $MN$ , entonces los triángulos  $\triangle FMR$  y  $\triangle DTQ$  son de lados paralelos y como  $DT = FM$  los triángulos son congruentes, luego  $DQ = FR = PQ$ , por lo tanto  $Q$  es el punto medio de  $PD$ .  $\square$

**Ejemplo 1.5.6** Dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$  se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$  como se muestra en la figura. Por  $A$  se traza una recta  $l$  que

intersecta de nuevo a las circunferencias en los puntos  $M$  y  $N$ . Por  $M$  y  $N$  se trazan las líneas tangentes respectivas y éstas se intersectan en el punto  $P$ . La paralela a  $PN$  por  $O_2$  y la paralela a  $PM$  por  $O_1$  se intersectan en  $Q$ . Demuestra que las rectas  $PQ$ , al variar la recta  $l$ , pasan por un punto fijo y que la longitud del segmento  $PQ$  es constante.



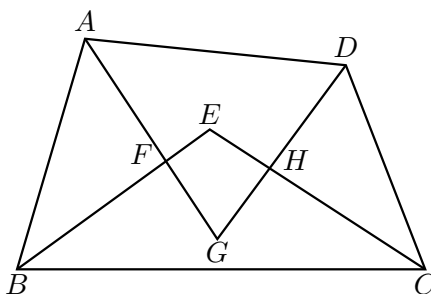
*Demostración.* Como vimos en el Ejemplo 1.5.1, el cuadrilátero  $BMPN$  es cíclico. Entonces  $\angle BPN = \angle BMN = \alpha$ . Por otro lado, tenemos que  $\angle BO_1O_2 = \angle BMN$  y  $\angle BO_2O_1 = \angle BNM$ , lo cual implica que  $\angle O_1BO_2 = \angle MBN$ . Con esto hemos probado que el cuadrilátero  $BO_1QO_2$  es cíclico. De aquí obtenemos que  $\angle BQO_2 = \angle BO_1O_2 = \angle BMN = \alpha$ , lo cual implica que  $B$ ,  $Q$  y  $P$  están alineados. De no ser así, tendríamos que  $BP$  intersectaría a la línea  $QO_2$  en un punto  $Q'$  distinto de  $Q$ , pero entonces también tendríamos que  $\angle BQ'O_2 = \angle BPN = \angle BQO_2 = \alpha$ , lo que a su vez implicaría que los puntos  $B$ ,  $O_1$ ,  $Q$ ,  $Q'$  y  $O_2$  son concíclicos. Esto es una contradicción, por lo tanto,  $B$ ,  $Q$  y  $P$  están alineados.

Para la segunda parte consideramos la proyección de  $Q$  sobre  $PN$  y la llamamos  $T$ . Sabemos que el ángulo  $\angle BMA = \alpha$  no depende de la elección de la recta  $l$ , entonces, como la longitud del segmento  $QT$  es igual al radio de la circunferencia

de centro  $O_2$  y  $\angle QPT = \alpha$ , tenemos que los triángulos  $\triangle QPT$  siempre son congruentes. Por lo tanto, la longitud del segmento  $PQ$  no depende de la elección de la línea  $l$ .  $\square$

### 1.5.1. Problemas

**Problema 1.38** En la siguiente figura están trazadas las bisectrices <sup>6</sup> de los ángulos interiores del cuadrilátero  $ABCD$ , las cuales se intersectan en los puntos  $E, F, G$  y  $H$ , como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero  $EFGH$  es cíclico.



**Problema 1.39** En un triángulo  $\triangle ABC$  sean  $M, N$  y  $P$ , puntos sobre los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Se trazan las circunferencias circunscritas a los triángulos  $\triangle APN, \triangle BMP$  y  $\triangle CNM$ . Demuestra que las tres circunferencias tienen un punto en común.<sup>7</sup>

**Problema 1.40** Están dadas cuatro rectas en el plano de manera que no hay un par de ellas que sean paralelas. Estas rectas determinan cuatro triángulos. Demuestra que los centros de las circunferencias circunscritas a estos triángulos determinan un cuadrilátero cíclico.

**Problema 1.41** En un triángulo  $\triangle ABC$  sean  $M, N$  y  $P$ , puntos sobre los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Se trazan las circunferencias circunscritas a

<sup>6</sup>La bisectriz de un ángulo es la línea que pasa por el vértice y lo divide en dos ángulos iguales.

<sup>7</sup>Este resultado es conocido como *teorema de Miquel*.

los triángulos  $\triangle APN$ ,  $\triangle BMP$  y  $\triangle CNM$ . Sea  $T$  un punto cualquiera en el plano. La línea  $TA$  corta a la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle APN$  de nuevo en  $A'$ , La línea  $TB$  corta a la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle BMP$  de nuevo en  $B'$ , y La línea  $TC$  corta a la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle CNM$  de nuevo en  $C'$ . Demuestra que los puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $T$  son concíclicos.

**Problema 1.42** Por uno de los puntos  $C$  del arco  $\widehat{AB}$  de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda  $AB$  en los puntos  $D$  y  $E$ , y a la circunferencia, en los puntos  $F$  y  $G$ . ¿Para cuál posición del punto  $C$  en el arco  $\widehat{AB}$ , el cuadrilátero  $DEGF$  es cíclico?

**Problema 1.43** Una línea  $PQ$ , paralela al lado  $BC$  de un triángulo  $\triangle ABC$ , corta a  $AB$  y a  $AC$  en  $P$  y  $Q$ , respectivamente. La circunferencia que pasa por  $P$  y es tangente a  $AC$  en  $Q$  corta de nuevo a  $AB$  en  $R$ . Demuestra que el cuadrilátero  $RQCB$  es cíclico.

**Problema 1.44** Se toma un punto  $P$  en el interior de un rectángulo  $ABCD$  de tal manera que  $\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$ . Encuentra la suma de los ángulos  $\angle DAP$  y  $\angle BCP$ .

**Problema 1.45** Sobre los lados de un cuadrilátero convexo hacia el exterior están construidos cuadrados. Las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares. Demuestra que los segmentos que unen los centros de los cuadrados opuestos, pasan por el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero.

**Problema 1.46** En un cuadrado  $ABCD$ ,  $M$  es el punto medio de  $AB$ . Una línea perpendicular a  $MC$  por  $M$  intersecta  $AD$  en  $K$ . Demuestra que  $\angle BCM = \angle KCM$ .

**Problema 1.47** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero cíclico, sea  $M$  el punto de intersección de las diagonales de  $ABCD$ , y sean  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$  los pies de las perpendiculares desde  $M$  hacia los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , respectivamente. Determina el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero  $EFGH$ .

**Problema 1.48** Sea  $AB$  el diámetro de un círculo con centro  $O$ . Se toma un punto  $C$  sobre la circunferencia de tal manera que  $OC$  es perpendicular a  $AB$ . Sea  $P$  un punto sobre el arco  $CB$ . Las líneas  $CP$  y  $AB$  se intersectan en  $Q$ . Se escoge un punto  $R$  sobre la línea  $AP$  de tal manera que  $RQ$  y  $AB$  son perpendiculares. Demuestra que  $BQ = QR$ .

**Problema 1.49** Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo con ángulo recto en  $A$ , tal que  $AB < AC$ . Sea  $M$  el punto medio de  $BC$  y  $D$  la intersección de  $AC$  con la perpendicular a  $BC$  que pasa por  $M$ . Sea  $E$  la intersección de la paralela a  $AC$  que pasa por  $M$  con la perpendicular a  $BD$  que pasa por  $B$ . Demuestra que los triángulos  $AEM$  y  $MCA$  son semejantes si y sólo si  $\angle ABC = 60^\circ$ .

**Problema 1.50** Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales bisecta el lado opuesto.

**Problema 1.51** Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita hasta un lado es igual a la mitad de la longitud del lado opuesto.

**Problema 1.52** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo tal que las diagonales  $AC$  y  $BD$  son perpendiculares, y sea  $P$  su intersección. Demuestra que las reflexiones<sup>8</sup> de  $P$  con respecto a  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  son concíclicos.

**Problema 1.53** Está dada la circunferencia  $\Omega$ . Desde un punto exterior  $P$  se trazan dos líneas tangentes a  $\Omega$  las cuales la tocan en  $A$  y  $B$ . También por  $P$  se traza una secante  $l$  a  $\Omega$ . Desde el centro de  $\Omega$  se traza una recta perpendicular a  $l$  la cual corta a  $\Omega$  en el punto  $K$  y a  $l$  en  $C$  (el segmento  $BK$  corta a  $l$ ). Demuestra que  $BK$  bisecta el ángulo  $\angle ABC$ .

**Problema 1.54** La cuerda  $CD$  de un círculo de centro  $O$  es perpendicular a su diámetro  $AB$ . La cuerda  $AE$  bisecta el radio  $OC$ . Demuestra que la cuerda  $DE$  bisecta la cuerda  $BC$ .

<sup>8</sup>Decimos que un punto  $X'$  es el reflejado de  $X$  con respecto a una línea  $\ell$  si el segmento  $X'X$  es perpendicular a  $\ell$  y su punto medio está en  $\ell$ .



**Problema 1.55** Están dados una circunferencia  $C_1$  y un punto  $P$  exterior a ésta. Desde  $P$  se trazan las tangentes a  $C_1$  las cuales la intersectan en los puntos  $A$  y  $B$ . También desde  $P$  se traza la secante  $l$  la cual intersecta a  $C_1$  en los puntos  $C$  y  $D$ . Por  $A$  se traza una línea paralela a  $l$  la cual intersecta a  $C_1$ , además de en  $A$ , en un punto  $E$ . Demuestra que  $EB$  bisecta la cuerda  $CD$ .

**Problema 1.56** Desde un punto sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero  $\triangle ABC$  están trazadas rectas paralelas a  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , las cuales cortan  $CA$ ,  $AB$  y  $BC$  en los puntos  $M$ ,  $N$  y  $Q$ , respectivamente. Demuestra que  $M$ ,  $N$  y  $Q$  están alineados.

**Problema 1.57** Sean  $AB$  y  $CD$  dos cuerdas sobre una circunferencia las cuales no se intersectan y sea  $P$  un punto variable sobre el arco  $\widehat{AB}$ , el cual no contiene los puntos  $C$  y  $D$ . Sean  $E$  y  $F$  las intersecciones de las cuerdas  $PC$ ,  $AB$ , y  $PD$ ,  $AB$ , respectivamente. Demuestra que el valor de  $\frac{AE \cdot BF}{EF}$  no depende de la posición del punto  $P$ .

**Problema 1.58** El  $\triangle ABC$  tiene inscrita una circunferencia, cuyo diámetro pasa por el punto de tangencia con el lado  $BC$  y corta la cuerda que une los otros dos puntos de tangencia en el punto  $N$ . Demuestra que  $AN$  parte  $BC$  por la mitad.

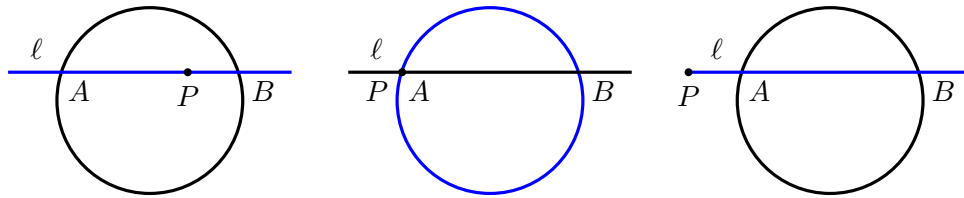
**Problema 1.59** Dos circunferencias se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$ . Una recta arbitraria pasa por  $B$  y corta por segunda vez la primera circunferencia en el punto  $C$  y a la segunda en el punto  $D$ . Las tangentes a la primera circunferencia en  $C$  y a la segunda en  $D$  se cortan en el punto  $M$ . Por el punto de intersección de  $AM$  y  $CD$  pasa una recta paralela a  $CM$ , que corta  $AC$  en el punto  $K$ . Demuestra que  $KB$  es tangente a la segunda circunferencia.

**Problema 1.60** Sean  $B$  y  $C$  dos puntos de una circunferencia,  $AB$  y  $AC$  las tangentes desde  $A$ . Sea  $Q$  un punto del segmento  $AC$  y  $P$  la intersección de  $BQ$  con la circunferencia. La paralela a  $AB$  por  $Q$  corta a  $BC$  en  $J$ . Demuestra que  $PJ$  es paralelo a  $AC$  si y sólo si  $BC^2 = AC \cdot QC$ .

**Problema 1.61** Dado un cuadrilátero cíclico  $ABCD$ , las diagonales  $AC$  y  $BD$  se intersectan en  $E$  y las líneas  $AD$  y  $BC$  se intersectan en  $F$ . Los puntos medios de  $AB$  y  $CD$  son  $G$  y  $H$ , respectivamente. Demuestra que  $EF$  es tangente en  $E$  al circuncírculo del triángulo  $\triangle EGH$ .

## 1.6. Potencia de un punto con respecto a una circunferencia

Consideremos un punto  $P$  y una circunferencia  $\Omega$ . Ahora, tracemos una línea  $\ell$  que pase por  $P$  y nombremos  $A$  y  $B$  a las intersecciones de  $\ell$  con  $\Omega$ . El producto  $PA \cdot PB$  es llamado la *potencia* de  $P$  con respecto a  $\Omega$ . Como veremos enseguida, el valor de  $PA \cdot PB$  no depende de la línea  $\ell$  que hayamos trazado. Sin embargo, cuando consideramos segmentos dirigidos tenemos que la potencia de un punto dado  $P$  es positiva, cero, o negativa, dependiendo de si el punto se encuentra fuera, sobre, o dentro de la circunferencia. De ahora en adelante no nos preocuparemos por el signo de la potencia, ya que para muchos de los problemas a los que nos enfrentamos en una olimpiada de matemáticas sólo nos interesa el valor absoluto de ésta.



**Teorema 1.6.1** La potencia de un punto  $P$  con respecto a una circunferencia  $\Omega$  es constante.

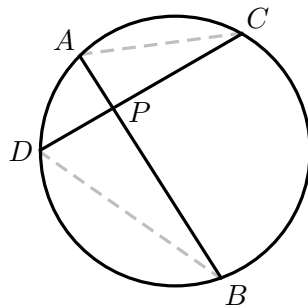
*Demostración.* Demostraremos el teorema para cada uno de los casos siguientes.

- I. El punto  $P$  está sobre la circunferencia. Claramente la potencia es cero ya que uno de los dos segmentos  $PA$  o  $PB$  tiene longitud cero.

- II. El punto  $P$  está en el interior de  $\Omega$ . Sean  $AB$  y  $CD$  dos cuerdas arbitrarias que pasan por el punto  $P$ . Tracemos  $CA$  y  $BD$ . Tenemos que  $\angle ACD = \angle ABD$  porque ambos son ángulos inscritos que intersectan el mismo arco, análogamente  $\angle CAB = \angle CDB$ , de aquí que el triángulo  $\triangle APC$  es semejante al triángulo  $\triangle DPB$  de donde se obtiene que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \implies AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

lo cual muestra que la potencia es constante para todas las cuerdas que pasen por  $P$ .

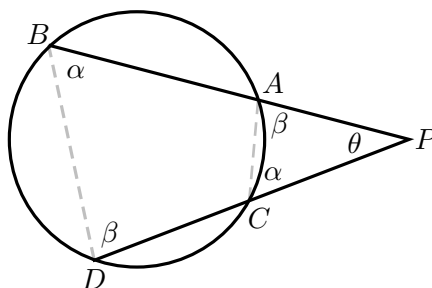


- III. El punto  $P$  está en el exterior de la circunferencia. Sean  $PB$  y  $PD$  dos secantes arbitrarias trazadas desde  $P$ , las cuales intersectan a la circunferencia, además de en  $B$  y  $D$ , en los puntos  $A$  y  $C$ , como se muestra en la figura. Tracemos  $CA$  y  $BD$ . Tenemos que  $\angle ACP = \angle ABD = \alpha$ , ya que el cuadrilátero  $ABDC$  es cíclico. Por la misma razón,  $\angle CAP = \angle BDC = \beta$ , de aquí que el triángulo  $\triangle APC$  es semejante al triángulo  $\triangle DPB$  de donde se obtiene que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB} \implies AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

lo cual muestra que la potencia es constante para todas las rectas secantes que pasen por  $P$ .<sup>9</sup>  $\square$

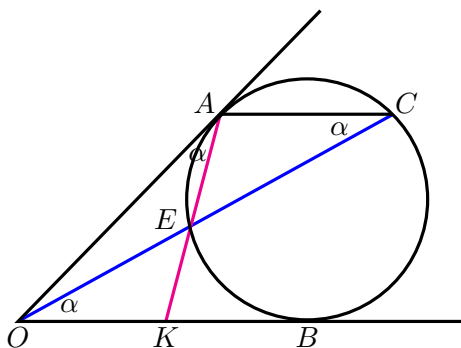
<sup>9</sup>Falta demostrar que el valor de la potencia se sigue conservando cuando la recta trazada desde  $P$  es tangente a la circunferencia, pero esto se deja como ejercicio.



Veremos ahora como la potencia de un punto nos puede ayudar a solucionar algunos problemas en los que aparentemente no tiene relación.

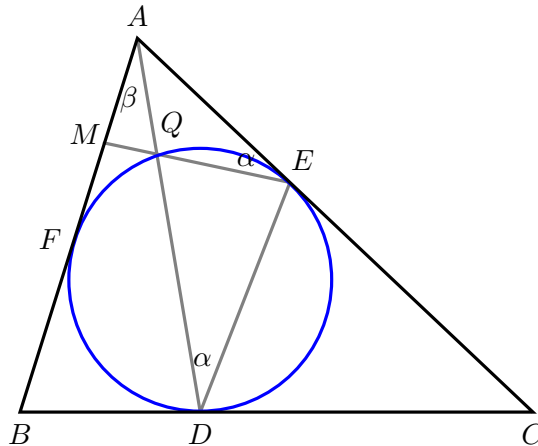
**Ejemplo 1.6.1** *Está dado un ángulo con vértice  $O$  y una circunferencia inscrita en él, la cual toca sus lados en los puntos  $A$  y  $B$ . Por el punto  $A$  se traza una línea paralela a  $OB$  la cual intersecta a la circunferencia en el punto  $C$ . El segmento  $OC$  intersecta la circunferencia en el punto  $E$ . Las líneas  $AE$  y  $OB$  se intersectan en el punto  $K$ . Demuestra que  $OK = KB$ .*

*Demostración.* Demostrar que  $OK = KB$  es equivalente a demostrar que  $OK^2 = KB^2$ . Como  $KB^2$  es la potencia del punto  $K$  a la circunferencia tenemos que  $KB^2 = KE \cdot KA$  (esto se deja como ejercicio). Sólo falta calcular  $OK^2$ , y para esto tenemos que  $\angle OAK = \angle ACE = \alpha$ , ya que ambos ángulos intersectan el arco  $\widehat{EA}$ ; además  $\angle EOK = \angle ACE$ , por ser  $AC$  y  $OK$  paralelos. Tenemos entonces que  $\triangle EOK \sim \triangle OAK$  de donde obtenemos que  $OK^2 = KE \cdot KA$  y como ya habíamos encontrado que  $KB^2 = KE \cdot KA$  tenemos que  $OK^2 = KB^2$ , es decir,  $OK = KB$ .  $\square$



**Ejemplo 1.6.2** La circunferencia inscrita en el triángulo  $\triangle ABC$  es tangente a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  en los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente.  $AD$  corta la circunferencia en un segundo punto  $Q$ . Demuestra que la recta  $EQ$  pasa por el punto medio de  $AF$  si y sólo si  $AC = BC$ .

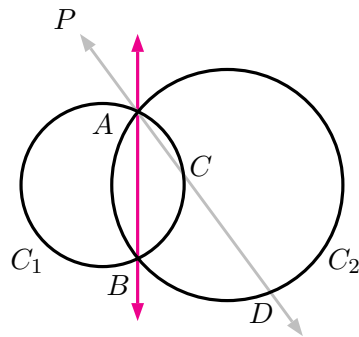
*Demostración.* De manera análoga a la solución del ejemplo anterior, tenemos que  $M$  es el punto medio de  $AF$  si y sólo si  $\angle MAQ = \angle AEM$  ( $\beta = \alpha$ ).



Por otro lado, sabemos que  $\angle EDQ = \angle AEM$  (inscrito y semi-inscrito que intersectan el mismo arco), entonces  $M$  será el punto medio de  $AF$  si y sólo si  $\angle MAQ = \angle EDQ$ . Es decir,  $M$  es el punto medio de  $AF$  si y sólo si  $ED \parallel AB$ . Pero esto último es cierto si y sólo si  $AC = BC$ .  $\square$

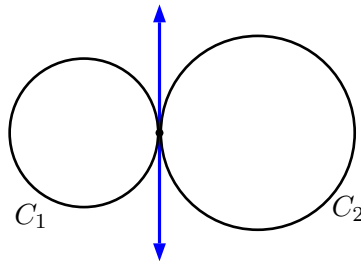
**Definición 1.6.1** Dadas dos circunferencias, consideremos el conjunto de puntos que tienen la misma potencia con respecto a ambas. A este conjunto se le denomina eje radical.

Mostraremos que el eje radical es una línea recta. Consideremos primero el caso cuando las dos circunferencias se cortan en dos puntos:



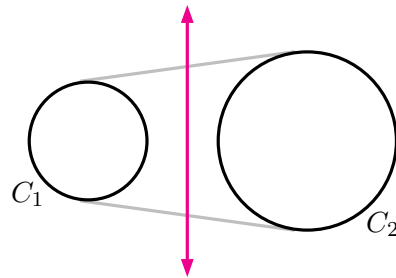
Es muy fácil ver que cualquier punto sobre la línea que pasa por  $A$  y  $B$  tiene la misma potencia con respecto a las dos circunferencias. Pero, ¿cómo sabemos que no hay más puntos, además de los de esta línea, que pertenezcan al eje radical? Como veremos ahora, no existe ningún punto fuera de la recta el cual tenga la misma potencia con respecto a  $C_1$  y  $C_2$ . Supongamos que  $P$  tiene la misma potencia con respecto a  $C_1$  y  $C_2$  y consideremos la línea que pasa por  $P$  y  $A$ . Esta línea interseca a  $C_1$  y  $C_2$  por segunda vez en  $C$  y  $D$ , respectivamente. Tenemos que la potencia de  $P$  con respecto a  $C_1$  es  $PA \cdot PC$  y la potencia de  $P$  con respecto a  $C_2$  es  $PA \cdot PD$ , pero  $PC \neq PD$ , por lo tanto  $P$  no pertenece al eje radical.

Si las dos circunferencias son tangentes en un punto entonces el eje radical es la línea tangente que pasa por el punto común:



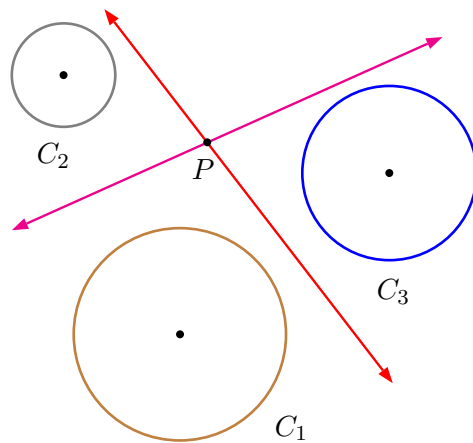
Por otro lado, si las dos circunferencias no se intersecan, se puede probar que el eje radical es la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Esto se deja como ejercicio para el lector.



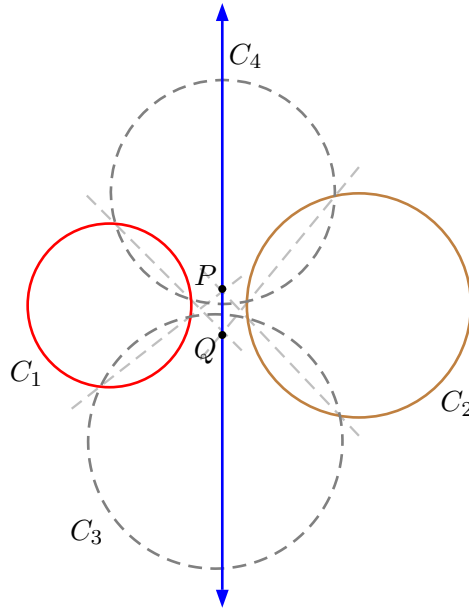
**Teorema 1.6.2** Dadas tres circunferencias cuyos centros no están alineados, los tres ejes radicales (uno por cada par de circunferencias) se intersectan en un punto. Este punto es llamado el centro radical de las circunferencias.

*Demostración.* Sean  $C_1, C_2$  y  $C_3$  las circunferencias dadas y sea  $P$  el punto donde se intersectan los ejes radicales de  $C_1$  y  $C_2$ , y  $C_1$  y  $C_3$ , respectivamente. De aquí es claro que  $P$  tiene la misma potencia con respecto a  $C_1, C_2$  y  $C_1, C_3$ , en particular,  $P$  tiene la misma potencia con respecto a  $C_2$  y  $C_3$ . Se sigue que  $P$  pertenece al eje radical de  $C_2$  y  $C_3$ .  $\square$



Utilizando este teorema podemos dar una manera de construir el eje radical de dos circunferencias que no se intersectan. Por ejemplo, para encontrar el eje radical de  $C_1$  y  $C_2$  trazamos dos circunferencias ( $C_3$  y  $C_4$ ) cada una de las cuales interseque a  $C_1$  y  $C_2$ . Tenemos que el centro radical de  $C_1, C_2$  y  $C_3$  es  $P$ , y el

centro radical de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_4$  es  $Q$ . Como  $P$  y  $Q$  tienen la misma potencia con respecto a  $C_1$  y  $C_2$  tenemos que el eje radical de  $C_1$  y  $C_2$  es la línea que pasa por  $P$  y  $Q$ .

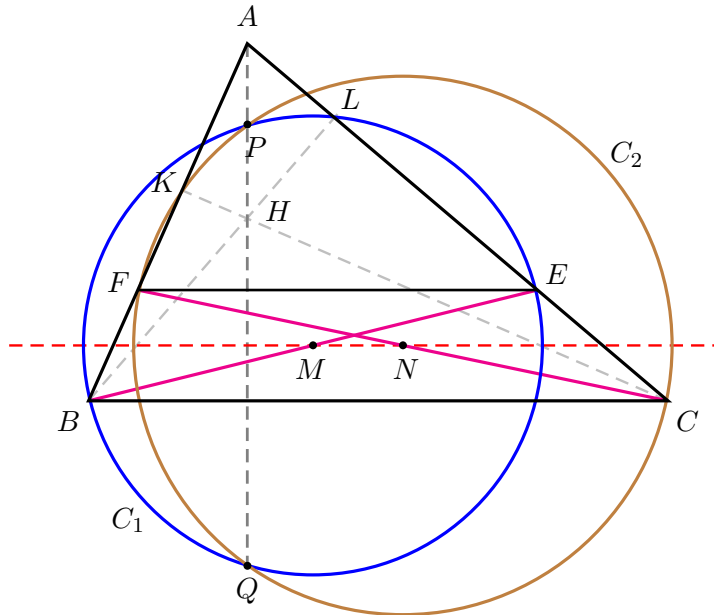


**Ejemplo 1.6.3** Una línea paralela al lado  $BC$  de un triángulo  $\triangle ABC$  corta a  $AB$  en  $F$  y a  $AC$  en  $E$ . Demuestra que las circunferencias que tienen como diámetros a  $BE$  y a  $CF$  se cortan en un punto que cae en la altura del triángulo  $\triangle ABC$  bajada desde el vértice  $A$ .

*Demostración.* Sean  $C_1$  y  $C_2$  las circunferencias de diámetros  $BE$  y  $CF$ , respectivamente. Supongamos que  $C_1$  intersecta a  $AC$  de nuevo en  $L$  y que  $C_2$  intersecta a  $AB$  de nuevo en  $K$ . Sean  $P$  y  $Q$  los puntos de intersección de estas circunferencias. Debido a que  $BE$  es diámetro de  $C_1$  tenemos que  $\angle BLE = 90^\circ$ , de la misma manera tenemos que  $\angle CKF = 90^\circ$ , y con esto tenemos que el cuadrilátero  $BKLC$  es cíclico. Denotemos la circunferencia circunscrita de  $BKLC$  por  $C_3$ . Tenemos que la línea  $BL$  es el eje radical de  $C_1$  y  $C_3$ , además, la línea  $CK$  es el eje radical de  $C_2$  y  $C_3$ . Tenemos que estos ejes radicales se intersectan en el ortocentro del triángulo (el punto donde concurren las alturas,  $H$ ), y por el Teorema 1.6.2 tenemos que el eje radical de  $C_1$  y  $C_2$  también debe pasar por  $H$ . Como el eje radical de  $C_1$  y  $C_2$  es precisamente la línea  $PQ$ , tenemos que

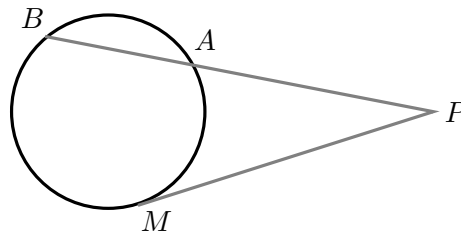


$PQ$  pasa por  $H$ , además, como sabemos que la línea que une los centros de dos circunferencias es perpendicular a su eje radical (esto se deja como ejercicio), tenemos entonces que  $PQ$  es perpendicular a  $MN$ . Por otro lado, como  $M$  y  $N$  son puntos medios de  $BE$  y  $CF$ , además, como  $EF \parallel BC$ , concluimos que los puntos  $P$  y  $Q$  están sobre la línea que contiene la altura desde el vértice  $A$ .  $\square$



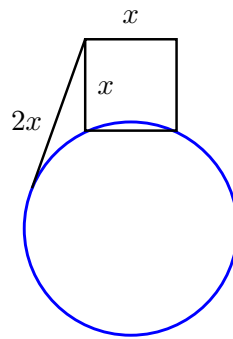
1.6.1. Problemas

**Problema 1.62** En la siguiente figura están trazadas una secante y una tangente que intersectan la circunferencia en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $M$ . Demuestra que  $PM^2 = PA \cdot PB$ .

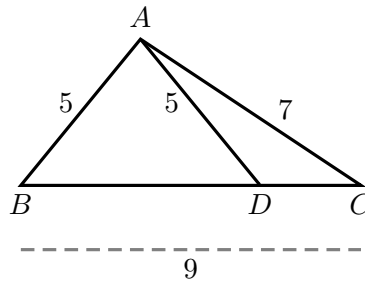


**Problema 1.63** En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está traza-

da una tangente, la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encuentra el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.



**Problema 1.64** En la siguiente figura  $AB = AD = 5$ ,  $BC = 9$  y  $AC = 7$ . Encuentra  $\frac{BD}{DC}$ .



**Problema 1.65** Demuestra que el eje radical de dos circunferencias, donde ninguna de ellas contiene a la otra, es la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.

**Problema 1.66** Demuestra que el eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la línea de los centros <sup>11</sup>.

**Problema 1.67** Por un punto sobre el eje radical de dos circunferencias dibujamos secantes a cada una de éstas. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre las circunferencias. Demuestra que esos puntos forman un cuadrilátero cíclico.

<sup>11</sup>Se llama línea de los centros a la línea que pasa por los centros de dos circunferencias.

**Problema 1.68** Sea  $BD$  la bisectriz de ángulo  $\angle B$  del triángulo  $\triangle ABC$ . El circuncírculo del triángulo  $\triangle BDC$  intersecta  $AB$  en  $E$  y el circuncírculo del triángulo  $\triangle ABD$  intersecta  $BC$  en  $F$ . Demuestra que  $AE = CF$ .

**Problema 1.69** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo arbitrario y sea  $P$  un punto fijo en el plano. Las líneas  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  intersectan por segunda vez a la circunferencia circunscrita del triángulo  $\triangle ABC$  en los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$ , respectivamente. Consideremos dos circunferencias, una que pasa por  $A$  y  $A_1$  y otra que pasa por  $B$  y  $B_1$ . Sean  $D$  y  $D_1$  los extremos de la cuerda común de estas circunferencias. Demuestra que  $C$ ,  $C_1$ ,  $D$  y  $D_1$  se hallan en una misma circunferencia.

**Problema 1.70** Sea  $C$  un punto sobre un semicírculo de diámetro  $AB$  y sea  $D$  el punto medio del arco  $\widehat{AC}$ . Sea  $E$  la proyección del punto  $D$  sobre la línea  $BC$  y sea  $F$  la intersección de la línea  $AE$  con el semicírculo. Demuestra que  $BF$  bisecta al segmento  $DE$ .

**Problema 1.71** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero inscrito en un semicírculo  $\Gamma$  de diámetro  $AB$ . Las líneas  $AC$  y  $BD$  se intersectan en  $E$  y las líneas  $AD$  y  $BC$  en  $F$ . La línea  $EF$  intersecta al semicírculo  $\Gamma$  en  $G$  y a la línea  $AB$  en  $H$ . Demuestra que  $E$  es el punto medio del segmento  $GH$  si y sólo si  $G$  es el punto medio del segmento  $FH$ .

**Problema 1.72** Sea  $P$  al punto de intersección de las diagonales  $AC$  y  $BD$  de un cuadrilátero  $ABCD$  inscrito en una circunferencia, y sea  $M$  el punto medio de  $CD$ . La circunferencia que pasa por  $P$  y que es tangente a  $CD$  en  $M$ , corta a  $BD$  y a  $AC$  en los puntos  $Q$  y  $R$ , respectivamente. Se toma un punto  $S$  sobre el segmento  $BD$ , de tal manera que  $BS = DQ$ . Por  $S$  se traza una paralela a  $AB$  que corta a  $AC$  en un punto  $T$ . Demuestra que  $AT = RC$ .

**Problema 1.73** Demuestra que si una circunferencia intersecta los lados  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  del triángulo  $\triangle ABC$  en los puntos  $D, D'$ ;  $E, E'$ ;  $F, F'$ ; respectivamente, entonces

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} = 1.$$

**Problema 1.74** En una circunferencia está trazado el diámetro  $AB$  y la cuerda  $CD$  perpendicular a  $AB$ . Una circunferencia arbitraria es tangente a la cuerda  $CD$  y al arco  $BD$ . Demuestra que la tangente a esta circunferencia trazada a partir del punto  $A$  es igual a  $AC$ .

**Problema 1.75** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo acutángulo. Los puntos  $M$  y  $N$  son tomados sobre los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente. Los círculos con diámetros  $BN$  y  $CM$  se intersectan en los puntos  $P$  y  $Q$ . Demuestra que  $P$ ,  $Q$  y el ortocentro  $H$ , son colineales.

**Problema 1.76** Dado un punto  $P$ , en el plano de un triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  las proyecciones de  $P$  sobre los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. El triángulo  $\triangle DEF$  es denominado el triángulo pedal del punto  $P$ . Demuestra que el área del triángulo  $\triangle DEF$  se puede calcular como

$$|DEF| = \frac{(R^2 - d^2)}{4R^2} |ABC|,$$

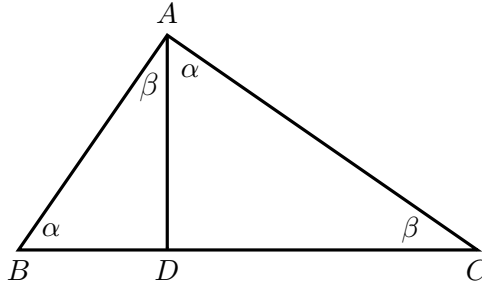
donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle ABC$  y  $d$  es la distancia del punto  $P$  al circuncentro de  $\triangle ABC$ . (Teorema de Euler)

**Problema 1.77** Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  cuatro puntos distintos sobre una línea (en ese orden). Los círculos con diámetros  $AC$  y  $BD$  se intersectan en  $X$  y  $Y$ . La línea  $XY$  intersecta  $BC$  en  $Z$ . Sea  $P$  un punto sobre la línea  $XY$ , distinto de  $Z$ . La línea  $CP$  intersecta el círculo con diámetro  $AC$  en  $C$  y  $M$ , y la línea  $BP$  intersecta el círculo con diámetro  $BD$  en  $B$  y  $N$ . Demuestra que las líneas  $AM$ ,  $DN$  y  $XY$  son concurrentes.

**Problema 1.78** Sea  $I$  el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo  $\triangle ABC$ . Esta circunferencia es tangente a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  del triángulo en los puntos  $K$ ,  $L$  y  $M$ , respectivamente. La recta paralela a  $MK$  que pasa por el punto  $B$  intersecta a las rectas  $LM$  y  $LK$  en los puntos  $R$  y  $S$ , respectivamente. Demuestra que el ángulo  $\angle RIS$  es agudo.

## 1.7. Teorema de Pitágoras

Antes de enunciar el *Teorema de Pitágoras* vamos a analizar un triángulo rectángulo el cual tiene trazada la altura hacia la hipotenusa .



Sea  $\triangle ABC$  el triángulo mencionado el cual tiene trazada la altura  $AD$  y con ángulo recto en  $A$ . Sean  $\angle ABC = \alpha$  y  $\angle ACB = \beta$ . Tenemos que  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , entonces también  $\angle DAC = \alpha$  y  $\angle BAD = \beta$ . Así, de ésta manera hemos obtenido dos triángulos semejantes al  $\triangle ABC$ , es decir,  $\triangle BAD$  y  $\triangle DAC$  son semejantes al triángulo  $\triangle ABC$ . De la semejanza entre  $\triangle BAD$  y  $\triangle DAC$  obtenemos:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

de aquí obtenemos que

$$AD^2 = BD \cdot DC,$$

y se dice que  $AD$  es la *media geométrica* o *media proporcional* de  $BD$  y  $DC$ . Además, de manera análoga podemos obtener también que

$$AB^2 = BD \cdot BC \tag{1}$$

(de la semejanza de los triángulos  $\triangle BAD$  y  $\triangle ABC$ ) y que

$$AC^2 = DC \cdot BC \tag{2}$$

(de la semejanza de los triángulos  $\triangle DAC$  y  $\triangle ABC$ ).

Sumando (1) y (2) tenemos que

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC,$$

esto es

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC) = BC \cdot BC,$$

es decir

$$AB^2 + AC^2 = BC^2. \quad (3)$$

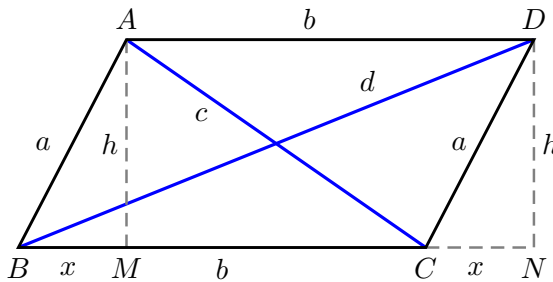
Con esto hemos probado el teorema de Pitágoras.

**Teorema 1.7.1** *La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

Este teorema es atribuido a uno de los más grandes matemáticos de la antigua Grecia, Pitágoras, y será de gran utilidad en muchos de los problemas que veremos más adelante. El recíproco también es cierto, pero esto se deja como ejercicio. Utilizando el Teorema de Pitágoras es fácil probar el siguiente teorema, conocido como la *Ley del Paralelogramo*.

**Teorema 1.7.2** *Probar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.*

*Demostración.* Sea  $ABCD$  el paralelogramo y sean  $AB = CD = a$  y  $BC = DA = b$ . También sean  $AC = c$  y  $BD = d$ .



Tracemos perpendiculares a  $BC$  desde  $A$  y  $D$ , las cuales intersectan a  $BC$  en  $M$  y  $N$ . Sean  $AM = DN = h$  y  $BM = CN = x$ . Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos  $\triangle DCN$ ,  $\triangle DBN$ ,  $\triangle AMC$  tenemos las siguientes igualdades:

$$h^2 + x^2 = a^2 \quad (4)$$

$$h^2 + (b + x)^2 = d^2 \quad (5)$$

$$h^2 + (b - x)^2 = c^2 \quad (6)$$

sumando (5) y (6) obtenemos

$$2h^2 + 2b^2 + 2x^2 = d^2 + c^2.$$

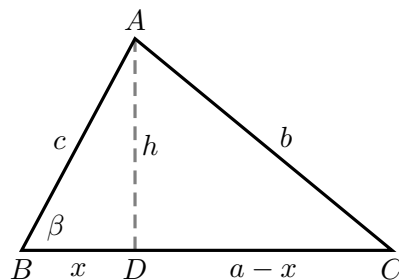
Ahora utilizando (4) tenemos que

$$2a^2 + 2b^2 = d^2 + c^2. \quad (7)$$

Lo cual queríamos demostrar.  $\square$

De nuevo, utilizando el Teorema de Pitágoras, es fácil probar la bien conocida *Ley del Coseno*.

**Ejemplo 1.7.1** En el triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  y  $\angle ABC = \beta$ . Demuestra que  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ .



*Solución.* Sea  $AD = h$  la altura trazada hacia el lado  $BC$  y sea  $BD = x$ . Tenemos que

$$h^2 + x^2 = c^2$$

y

$$h^2 + (a - x)^2 = b^2$$

esto implica que

$$c^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ax = c^2 + a^2 - 2ax = b^2$$

y como  $x = c \cdot \cos \beta$ , tenemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta. \quad \square$$

De manera muy simple se puede probar el siguiente:

**Lema 1.7.1** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos dados. Entonces, el lugar geométrico de los puntos <sup>12</sup>  $M$  tales que  $AM^2 - MB^2 = k$  (donde  $k$  es un número dado), es una recta perpendicular a  $AB$ .

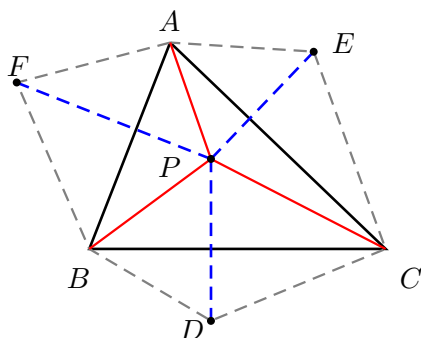
Ahora, utilizando el lema anterior probaremos el siguiente *Teorema de Carnot*:

**Teorema 1.7.3** Sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  tres puntos dados. Para que las líneas perpendiculares sobre los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  de un triángulo  $\triangle ABC$  trazadas desde los puntos  $E$ ,  $D$  y  $F$ , respectivamente, se intersecten en un punto, es necesario y suficiente que

$$DB^2 - BF^2 + FA^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = 0.$$

*Demostración.* Supongamos primero que las tres perpendiculares concurren en un punto  $P$ . Por el lema anterior, tenemos que  $AF^2 - FB^2 = AP^2 - PB^2$ ,  $BD^2 - DC^2 = BP^2 - PC^2$  y  $CE^2 - EA^2 = CP^2 - PA^2$ . Sumando estas tres expresiones obtenemos que

$$DB^2 - BF^2 + FA^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = 0.$$



Ahora, supongamos que se cumple que  $DB^2 - BF^2 + FA^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = 0$ . Consideremos el punto  $P$  donde se intersectan las perpendiculares desde  $F$  y  $D$  sobre los lados  $AB$  y  $BC$ , respectivamente. Dado que se cumple

<sup>12</sup>El lugar geométrico de los puntos es el conjunto de puntos que cumplen una propiedad dada.



que  $AF^2 - FB^2 = AP^2 - PB^2$  y  $BD^2 - DC^2 = BP^2 - PC^2$ , tenemos que también debe cumplirse que  $CE^2 - EA^2 = CP^2 - PA^2$ . Esto último, por el lema anterior, implica que el segmento  $PE$  es perpendicular al lado  $AC$ . Por lo tanto, las perpendiculares trazadas desde  $D, E$  y  $F$  sobre los lados respectivos, concurren en un punto.  $\square$

### 1.7.1. Problemas

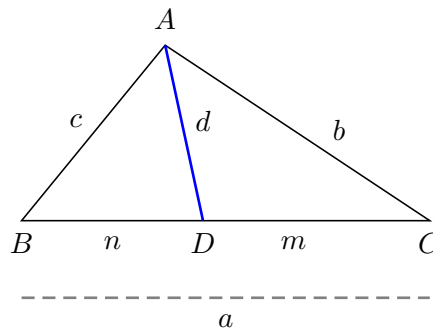
**Problema 1.79** Probar el inverso del teorema de Pitágoras: si  $a, b$  y  $c$  son los lados de un triángulo que cumple que  $a^2 + b^2 = c^2$ , entonces es un triángulo rectángulo.

**Problema 1.80** Sean  $a, b$  los catetos de un triángulo rectángulo,  $c$  la hipotenusa y  $h$  la altura trazada hacia la hipotenusa. Demuestra que el triángulo con lados  $h, c + h$  y  $a + b$  es un triángulo rectángulo.

**Problema 1.81** Dado un rectángulo  $A_1A_2A_3A_4$  y un punto  $P$  dentro de éste sabemos que  $PA_1 = 4, PA_2 = 3$  y  $PA_3 = \sqrt{10}$ . ¿Cuál es la longitud de  $PA_4$ ?

**Problema 1.82** Sea  $D$  un punto sobre el lado  $BC$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Sean  $AB = c, BC = a, CA = b, AD = d, BD = n$  y  $DC = m$ . Demuestra que se cumple el Teorema de Stewart

$$b^2n + c^2m = a(d^2 + mn).$$



**Problema 1.83** En una circunferencia de radio  $R$  está trazado un diámetro y sobre éste se toma el punto  $A$  a una distancia  $d$  de su centro. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente al diámetro en el punto  $A$  y es tangente interiormente a la circunferencia dada.

**Problema 1.84**  $K$  es el punto medio del lado  $AD$  del rectángulo  $ABCD$ . Hallar el ángulo entre  $BK$  y la diagonal  $AC$  si sabemos que  $AD : AB = \sqrt{2}$ .

**Problema 1.85** En un triángulo  $\triangle ABC$ ,  $E$  es un punto sobre la altura  $AD$ . Demuestra que

$$AC^2 - CE^2 = AB^2 - EB^2.$$

**Problema 1.86** Sean  $AB$  y  $CD$  dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio  $R$ . Demuestra que

$$AC^2 + BD^2 = 4R^2.$$

**Problema 1.87** Un trapecio  $ABCD$ , con  $AB$  paralelo a  $CD$ , tiene sus diagonales  $AC$  y  $BD$  perpendiculares. Demuestra que

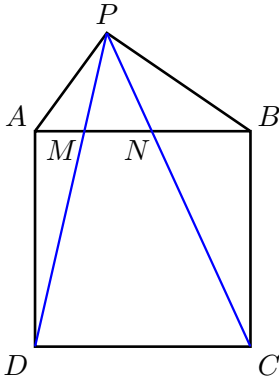
$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2.$$

**Problema 1.88** Demuestra que si en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de los lados opuestos son iguales, entonces sus diagonales son perpendiculares entre sí.

**Problema 1.89** Sobre un lado de un ángulo recto con vértice en un punto  $O$ , se toman dos puntos  $A$  y  $B$ , siendo  $OA = a$  y  $OB = b$ . Halla el radio de la circunferencia que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , a la cual es tangente el otro lado del ángulo.

**Problema 1.90** En la siguiente figura,  $ABCD$  es un cuadrado y el triángulo  $\triangle ABP$  es rectángulo con ángulo recto en  $P$ . Demuestra que

$$MN^2 = AM \cdot BN.$$



**Problema 1.91** Se dan el triángulo equilátero  $\triangle ABC$  y el punto arbitrario  $D$ ;  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  son los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos  $\triangle BCD$ ,  $\triangle CAD$  y  $\triangle ABD$ . Demuestra que las perpendiculares bajadas desde los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  y  $A_1B_1$ , respectivamente, concurren en un punto.

**Problema 1.92** En el hexágono convexo  $ABCDEF$  tenemos que  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = FA$ . Probar que las perpendiculares bajadas desde los puntos  $C$ ,  $E$  y  $A$  sobre las líneas  $BD$ ,  $DF$  y  $FB$ , respectivamente, se intersectan en un punto.

**Problema 1.93** En los rayos  $AB$  y  $CB$  del triángulo  $\triangle ABC$  están trazados los segmentos  $AM$  y  $CN$  de tal manera que  $AM = CN = p$ , donde  $p$  es el semiperímetro del triángulo ( $B$  se halla entre  $A$  y  $M$ , así como entre  $C$  y  $N$ ). Sea  $K$  el punto de la circunferencia circunscrita el cual es diametralmente opuesto a  $B$ . Demuestra que la perpendicular trazada desde  $K$  sobre  $MN$  pasa por el incentro del triángulo  $\triangle ABC$ .

**Problema 1.94** Se dan una circunferencia y el punto  $A$  fuera de ésta. Una circunferencia que pasa por  $A$ , es tangente a la dada en el punto arbitrario  $B$ . Las líneas tangentes a la segunda por los puntos  $A$  y  $B$  se intersectan en el punto  $M$ . Hallar el lugar geométrico de los puntos  $M$ .

**Problema 1.95** Una circunferencia de centro  $O$  pasa por los vértices  $A$  y  $C$  de un triángulo  $\triangle ABC$  y corta los segmentos  $AB$  y  $BC$  nuevamente en distintos

puntos  $K$  y  $N$ , respectivamente. Las circunferencias circunscritas a los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle KBN$  se cortan exactamente en dos puntos distintos  $B$  y  $M$ . Demuestra que el ángulo  $\angle OMB$  es un ángulo recto.

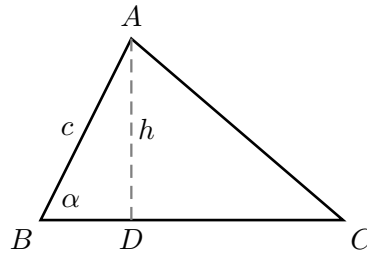
## 1.8. Areas de triángulos y cuadriláteros

Si en un triángulo conocemos la longitud de un lado y la altura trazada hacia éste, es bien sabido que podemos calcular su área simplemente multiplicando ambas magnitudes y después dividiendo entre dos. Sin embargo, existen otras fórmulas para calcular el área, las cuales en muchas ocasiones resultan más útiles, por ejemplo:

**Ejemplo 1.8.1** En el triángulo  $\triangle ABC$ , sabemos que  $AB = c$ ,  $BC = a$  y  $\angle ABC = \alpha$ . Entonces

$$|ABC| = \frac{1}{2}ac \cdot \text{Sen } \alpha.$$

*Demostración.* Sea  $h$  la longitud de la altura trazada hacia el lado  $BC$ . Sabemos que  $|ABC| = \frac{1}{2}ah$  y además como  $\frac{h}{c} = \text{Sen } \alpha$ , tenemos que  $|ABC| = \frac{1}{2}ac \cdot \text{Sen } \alpha$ .  $\square$



Además, por la Ley de Senos tenemos que

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C} = 2R,$$

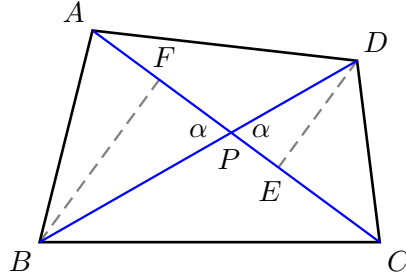
donde  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Utilizando esto y sustituyéndolo en la expresión anterior tenemos que

$$|ABC| = 2R^2 \cdot \text{Sen } A \cdot \text{Sen } B \cdot \text{Sen } C.$$

**Ejemplo 1.8.2** Consideremos un cuadrilátero convexo  $ABCD$  y sea  $P$  el punto de intersección de  $AC$  y  $BD$ . Si sabemos que  $\angle BPC = \alpha$ , entonces

$$|ABCD| = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \text{Sen } \alpha.$$

*Demostración.* Tracemos las perpendiculares desde  $B$  y  $D$  sobre  $AC$ , las cuales intersectan  $AC$  en  $F$  y  $E$ , respectivamente.



Tenemos que

$$|ABCD| = |ABC| + |ADC| = \frac{1}{2} AC \cdot BF + \frac{1}{2} AC \cdot DE$$

$\Rightarrow$

$$|ABCD| = \frac{AC \cdot BP \cdot \text{Sen } \alpha + AC \cdot DP \cdot \text{Sen } \alpha}{2} = \frac{AC(BP + DP) \cdot \text{Sen } \alpha}{2}$$

$\Rightarrow$

$$|ABCD| = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \text{Sen } \alpha. \quad \square$$

Además, si el cuadrilátero tiene alguna propiedad especial, es posible encontrar otras fórmulas para calcular el área.

**Ejemplo 1.8.3** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero cíclico, y sean  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$  y  $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ . Entonces tenemos que

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

*Demostración.* Sea  $\angle DAB = \alpha$  y sea  $x = BD$ . Tenemos que

$$|ABCD| = |ABD| + |BCD| = \frac{1}{2}(ad + bc) \cdot \text{Sen } \alpha = \frac{1}{2}(ad + bc)\sqrt{1 - \text{Cos}^2 \alpha},$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}x^2 &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \text{Cos } \alpha, \\x^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \text{Cos } \alpha,\end{aligned}$$

$\implies$

$$\text{Cos } \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2bc + 2ad},$$

$\implies$

$$|ABCD| = \frac{1}{2}(ad + bc)\sqrt{\frac{(2bc + 2ad)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{(2bc + 2ad)^2}},$$

$\implies$

$$|ABCD| = \frac{\sqrt{(2bc + 2ad + b^2 + c^2 - a^2 - d^2)(2bc + 2ad - b^2 - c^2 + a^2 + d^2)}}{4},$$

$\implies$

$$|ABCD| = \frac{1}{4}\sqrt{[(b + c)^2 - (a - d)^2][(a + d)^2 - (b - c)^2]},$$

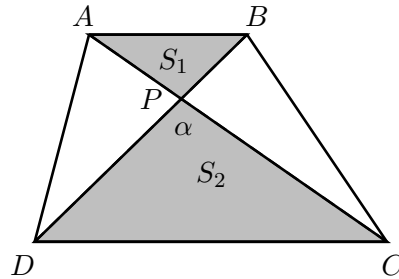
$$|ABCD| = \frac{1}{4}\sqrt{(b + c + d - a)(b + c + a - d)(a + d + c - b)(a + d + b - c)},$$

$$|ABCD| = \sqrt{(s - a)(s - d)(s - b)(s - c)}. \quad \square$$

La fórmula anterior es conocida como *fórmula de Brahmagupta*. Cuando el cuadrilátero se degenera en triángulo, obtenemos la conocida *fórmula de Herón*, por ejemplo, si  $D = A$  entonces tenemos que

$$|ABC| = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s)}.$$

**Ejemplo 1.8.4** Las áreas de los triángulos formados por los segmentos de las diagonales de un trapecio y sus bases son  $S_1$  y  $S_2$ . Hallar el área del trapecio.



*Solución.* En el trapecio  $ABCD$  sea  $P$  el punto de intersección de las diagonales, y sean  $|DPC| = S_2$ ,  $|APB| = S_1$  y  $\angle DPC = \alpha$ . Tenemos que

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{(AP \cdot PB \cdot \text{Sen } \alpha)(DP \cdot PC \cdot \text{Sen } \alpha)}$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{(AP \cdot DP \cdot \text{Sen } \alpha)(BP \cdot PC \cdot \text{Sen } \alpha)}$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{|APD| \cdot |BPC|}$$

pero como  $|APD| = |BPC|$ , tenemos que

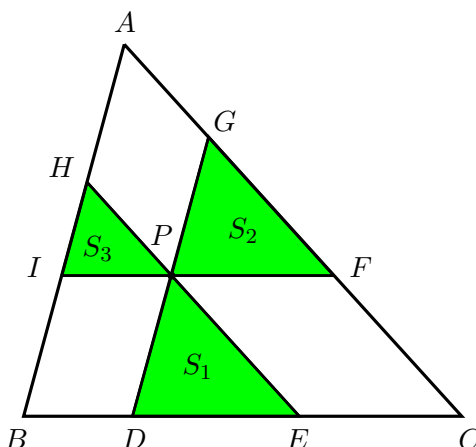
$$\sqrt{|APB| \cdot |DPC|} = \sqrt{S_1 \cdot S_2} = |APD| = |BPC|$$

$\Rightarrow$

$$|ABCD| = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. \quad \square$$

**Ejemplo 1.8.5** A través de cierto punto tomado dentro del triángulo, se han trazado tres rectas paralelas a sus lados. Estas rectas dividen el área del triángulo en seis partes, tres de las cuales son triángulos con áreas iguales a  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . Hallar el área del triángulo dado.

*Solución.* Sean  $P$  el punto dado y  $S$  el área del triángulo  $\triangle ABC$ . Sean  $D, E, F, G, H, I$  los puntos donde estas paralelas intersectan a los lados, como se muestra en la figura siguiente.



Los triángulos  $\triangle DEP$ ,  $\triangle FGP$  y  $\triangle HIP$  son semejantes al triángulo  $\triangle ABC$ , además sus lados se relacionan de la siguiente manera:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{PF}{BC} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{IP}{BC} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$$

También tenemos que  $IP = BD$  y que  $PF = EC$ , y como  $BD + DE + EC = BC$  obtenemos

$$\frac{IP}{BC} + \frac{DE}{BC} + \frac{PF}{BC} = \frac{BD + DE + EC}{BC} = 1 = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}.$$

De aquí obtenemos que  $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$ .  $\square$

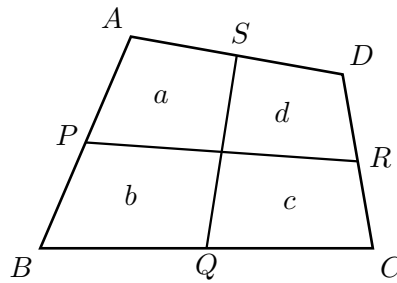
### 1.8.1. Problemas

**Problema 1.96** Tenemos dos triángulos con un vértice  $A$  común, los demás vértices se encuentran en dos rectas que pasan por  $A$ . Demuestra que la razón entre las áreas de estos triángulos es igual a la razón entre los productos de los dos lados de cada triángulo que contienen el vértice  $A$ .

**Problema 1.97** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo. Sean  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  los puntos medios de los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$ , respectivamente. Se trazan las



líneas  $PR$  y  $QS$  las cuales dividen el cuadrilátero en cuatro cuadriláteros más pequeños cuyas áreas se muestran en la figura. Demuestra que  $a + c = b + d$ .



**Problema 1.98** En el trapecio  $ABCD$ , de bases  $AB$  y  $DC$ , las diagonales se intersectan en el punto  $E$ , el área del  $\triangle ABE$  es 72 y el área del  $\triangle CDE$  es 50. ¿Cuál es el área del trapecio  $ABCD$ ?

**Problema 1.99** Demuestra que  $|ABC| = rs$ , donde  $r$  es el radio de la circunferencia inscrita y  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ .

**Problema 1.100** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo, y sean  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$  y  $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ . Sean además,  $\alpha$  y  $\beta$  dos ángulos opuestos en el cuadrilátero. Demuestra que

$$|ABCD| = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\alpha + \beta))}.$$

**Problema 1.101** Demuestra que la suma de las distancias, desde cualesquier punto interior de un triángulo equilátero, hasta sus lados es igual a la altura de éste triángulo.

**Problema 1.102** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo isósceles con  $AB = AC$ . Los puntos  $D$  y  $E$  están sobre los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente. La línea que pasa por  $B$  y paralela a  $AC$  intersecta la línea  $DE$  en  $F$ . La línea que pasa por  $C$  y paralela a  $AB$  intersecta la línea  $DE$  en  $G$ . Demuestra que

$$\frac{|DBCG|}{|FBCE|} = \frac{AD}{AE}.$$

**Problema 1.103** Demuestra que

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r},$$

donde  $h_1, h_2, h_3$  son las alturas del triángulo;  $r$  el radio de la circunferencia inscrita.

**Problema 1.104** En el paralelogramo  $ABCD$ , los vértices  $A, B, C$  y  $D$  están unidos con los puntos medios de los lados  $CD, AD, AB$  y  $BC$ , respectivamente. Demuestra que el área del cuadrilátero formado por éstas rectas tiene una quinta parte del área del paralelogramo.

**Problema 1.105** Sobre los catetos  $AC$  y  $BC$  de un triángulo rectángulo hacia el exterior están construidos los cuadrados  $ACKL$  y  $BCM N$ . Demuestra que el cuadrilátero acotado por los catetos y las rectas  $LB$  y  $NA$  es equivalente al triángulo formado por las rectas  $LB, NA$  y la hipotenusa  $AB$ .

**Problema 1.106** Están dados los puntos  $E, F, G, H$ , sobre la continuación de los lados  $AB, BC, CD, DA$ , de un cuadrilátero convexo  $ABCD$ , tales que  $BE = AB, CF = BC, DG = CD, AF = DA$ . Demuestra que

$$|EFGH| = 5 \cdot |ABCD|.$$

**Problema 1.107** En los lados  $AC$  y  $BC$  del triángulo  $\triangle ABC$ , hacia el exterior están construidos dos paralelogramos  $ACDE$  y  $BCFG$ . Las prolongaciones de  $DE$  y  $FG$  se intersectan en el punto  $H$ . Sobre el lado  $AB$  está construido el paralelogramo  $ABML$ , cuyos lados  $AL$  y  $BM$  son iguales y paralelos a  $HC$ . Demuestra que

$$|ABML| = |ACDE| + |BCFG| \quad (\text{Teorema generalizado de Pitágoras}).$$

**Problema 1.108** En un cuadrilátero convexo  $ABCD$ , los puntos medios de los lados  $BC$  y  $DA$  son  $E$  y  $F$ , respectivamente. Demuestra que

$$|EDA| + |FBC| = |ABCD|.$$

**Problema 1.109** *Por los extremos de la base menor de un trapecio están trazadas dos rectas paralelas que cortan la base mayor. Las diagonales del trapecio y éstas rectas dividen el trapecio en siete triángulos y un pentágono. Demuestra que la suma de las áreas de tres triángulos adyacentes a los lados y a la base menor del trapecio, es igual al área del pentágono.*

**Problema 1.110** *Sea  $ABCD$  un paralelogramo; el punto  $E$  se halla en la recta  $AB$ ;  $F$ , en la recta  $AD$  ( $B$ , en el segmento  $AE$ ;  $D$ , en el segmento  $AF$ ),  $K$  es el punto de intersección de las rectas  $ED$  y  $FB$ . Demuestra que*

$$|ABKD| = |CEKF|.$$

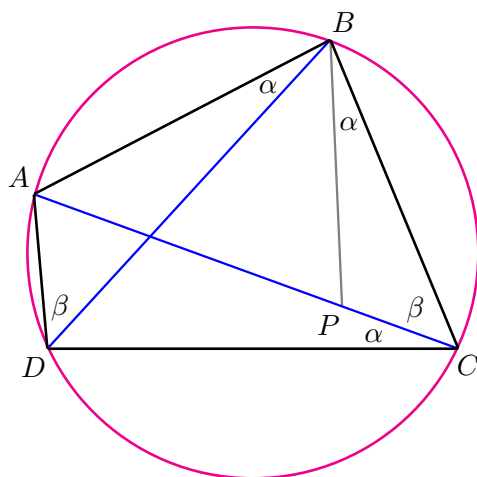
## 1.9. Teorema de Ptolomeo

En esta sección veremos un teorema sobre cuadriláteros cíclicos el cual se debe al matemático Ptolomeo, de la antigua Grecia. A pesar de que el teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico, sólo daremos la demostración de una parte del teorema. Tal parte del teorema resulta ser la más utilizada en la solución de algunos interesantes problemas. Sin embargo, el enunciado completo del Teorema de Ptolomeo es:

**Teorema 1.9.1** *Un cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico si y sólo si*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

*Demostración.* Demostraremos que si el cuadrilátero es cíclico entonces se cumple la expresión dada en el enunciado. Consideremos un punto  $P$  sobre la diagonal  $AC$  de tal manera que  $\angle PBC = \angle ABD = \alpha$ .



Dado que  $ABCD$  es cíclico, también tenemos que  $\angle PCB = \angle ADB = \beta$ . De aquí se sigue que los triángulos  $\triangle PBC$  y  $\triangle ABD$  son semejantes, entonces

$$PC = \frac{BC \cdot AD}{BD}.$$

Como también  $\triangle BAP$  y  $\triangle BDC$  son semejantes, tenemos que

$$AP = \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Sumando las dos expresiones obtenidas tenemos

$$AP + PC = AC = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD},$$

por lo tanto,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad \square$$

**Ejemplo 1.9.1** Dado un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$ , sean  $R$  y  $r$  el circunradio y el inradio, respectivamente. Sea  $O$  el circuncentro y sean  $d_A, d_B, d_C$ , las distancias desde  $O$  hacia los lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Demuestra que  $d_A + d_B + d_C = R + r$ .

*Demostración.* Sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  los pies de las perpendiculares desde  $O$  hacia los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Observemos que el cuadrilátero  $BDOF$  es cíclico, entonces aplicando el Teorema de Ptolomeo tenemos  $BO \cdot DF = BD \cdot FO + BF \cdot DO$ , es decir

$$R \cdot \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \cdot d_C + \frac{c}{2} \cdot d_A. \quad (1)$$

Análogamente,

$$R \cdot \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \cdot d_B + \frac{b}{2} \cdot d_A, \quad (2)$$

y

$$R \cdot \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \cdot d_C + \frac{c}{2} \cdot d_B. \quad (3)$$

Sumando (1), (2) y (3) obtenemos

$$R \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \right) = d_A \left( \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \right) + d_B \left( \frac{a}{2} + \frac{c}{2} \right) + d_C \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right).$$

Equivalentemente

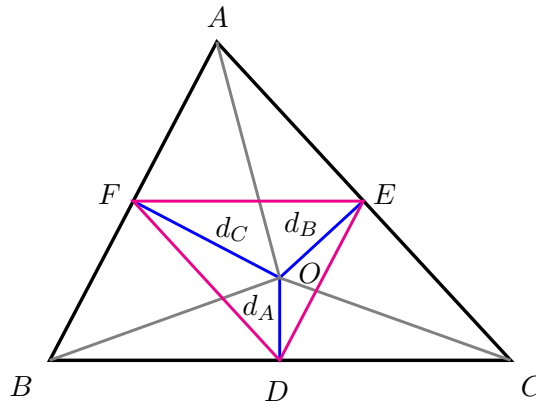
$$R \cdot s = s(d_A + d_B + d_C) - \left( \frac{a}{2} \cdot d_A + \frac{b}{2} \cdot d_B + \frac{c}{2} \cdot d_C \right),$$

es decir

$$R \cdot s = s(d_A + d_B + d_C) - (|BOC| + |COA| + |AOB|),$$

$$R \cdot s = s(d_A + d_B + d_C) - |ABC| = s(d_A + d_B + d_C) - s \cdot r,$$

donde  $s = \frac{a+b+c}{2}$ . De ésta última igualdad se obtiene la expresión deseada.  $\square$



### 1.9.1. Problemas

**Problema 1.111** *El triángulo equilátero  $\triangle ABC$  está inscrito en una circunferencia y en el arco  $\widehat{BC}$  se toma un punto arbitrario  $M$ . Demuestra que*

$$AM = BM + CM.$$

**Problema 1.112** *Dado un triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $I$  su incentro y  $L$  el punto donde la línea  $AI$  intersecta al circuncírculo. Demuestra que*

$$\frac{AL}{LI} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

**Problema 1.113** *Una circunferencia pasa por el vértice  $A$  de un paralelogramo  $ABCD$  e intersecta los lados  $AB$  y  $AD$  en los puntos  $P$  y  $R$ , respectivamente, y a la diagonal  $AC$  en el punto  $Q$ . Demuestra que  $AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD$ .*

**Problema 1.114** *El triángulo isósceles  $\triangle ABC$  ( $AB = AC$ ) está inscrito en una circunferencia. Sea  $P$  un punto en el arco  $\widehat{BC}$ . Demuestra que*

$$\frac{PA}{PB + PC} = \frac{AC}{BC}.$$

**Problema 1.115** *Sea  $A_0A_1 \dots A_{3n-1}$  un  $3n$  - ágono regular inscrito en una circunferencia. Desde un punto  $P$ , sobre la circunferencia, se trazan las cuerdas a los  $3n$  vértices. Demuestra que la suma de las longitudes de las  $n$  cuerdas más grandes es igual a la suma de las longitudes de las restantes  $2n$  cuerdas.*

**Problema 1.116** *Sea  $AB$  una cuerda en una circunferencia y  $P$  un punto sobre ésta. Sea  $Q$  la proyección de  $P$  sobre  $AB$ ,  $R$  y  $S$  las proyecciones de  $P$  sobre las tangentes al círculo en  $A$  y  $B$ . Demuestra que  $PQ$  es la media geométrica de  $PR$  y  $PS$ , esto es,  $PQ = \sqrt{PR \cdot PS}$ .*

**Problema 1.117** *Dado un heptágono  $ABCDEFG$  de lado 1, demuestra que las diagonales  $AC$  y  $AD$  verifican*

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$

**Problema 1.118** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero cíclico y sean  $x$ ,  $y$  y  $z$  las distancias desde  $A$  hacia las líneas  $BD$ ,  $BC$ ,  $CD$ , respectivamente. Demuestra que

$$\frac{BD}{x} = \frac{BC}{y} + \frac{CD}{z}.$$

**Problema 1.119** Sea  $\mathcal{P}$  un pentágono cíclico. Considera una triangulación de  $\mathcal{P}$ , es decir, la descomposición de  $\mathcal{P}$  en tres triángulos disjuntos con vértices en los vértices de  $\mathcal{P}$ . Ahora, considera la suma de los inradios de los triángulos en los cuales queda dividido  $\mathcal{P}$ . Demuestra que esta suma no depende de la triangulación escogida.

**Problema 1.120** Teorema de Casey. Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  cuatro círculos los cuales son tangentes a una circunferencia  $\Gamma$ , todos ellos tangentes internamente o externamente, y dispuestos en forma cíclica. Denotemos por  $t_{ij}$  la tangente externa a las circunferencias  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{C}_j$ . Entonces

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{41} = t_{13} \cdot t_{24}.$$

Recíprocamente, si las circunferencias están localizadas de manera que

$$\pm t_{12} \cdot t_{34} \pm t_{23} \cdot t_{41} \pm t_{13} \cdot t_{24} = 0,$$

para alguna combinación de los signos  $+$  y  $-$ , entonces existe una circunferencia la cual toca a todos los círculos, siendo los contactos todos internos o todos externos.





---

## Capítulo 2

# Puntos y rectas notables en el triángulo

---

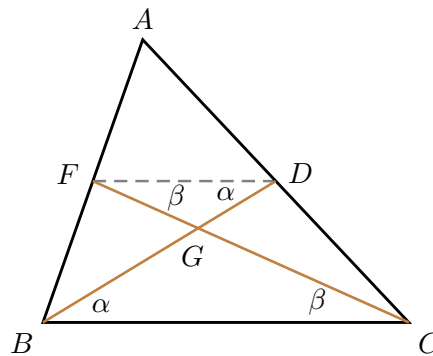
### 2.1. Las medianas y el gravicentro

Dado un triángulo, existen varios tipos de líneas las cuales poseen propiedades interesantes e importantes. Quizá la más simple de éstas es la línea que va de un vértice hacia el punto medio del lado opuesto. Esta línea es llamada *mediana* del triángulo. La primer propiedad interesante de las medianas es la siguiente:

**Teorema 2.1.1** *Las medianas en un triángulo concurren en un punto y se dividen por éste en la razón 2 : 1, a partir de los vértices.*

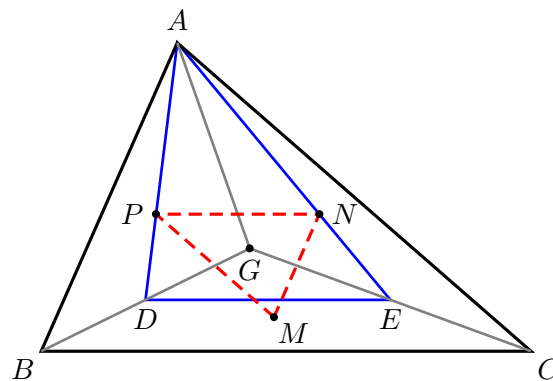
*Demostración.* Sean  $CF$  y  $BD$  dos medianas del triángulo  $\triangle ABC$ . Llamemos  $G$  al punto de intersección de estas dos medianas. Por el Teorema de Tales tenemos que  $FD$  es paralelo a  $BC$ , de aquí se sigue que  $\angle GFD = \angle GCB = \beta$ , ya que

son ángulos alternos internos. Análogamente  $\angle GDF = \angle GBC = \alpha$ . Tenemos que el triángulo  $\triangle GDF$  es semejante al triángulo  $\triangle GBC$  y sus lados están en la razón  $1 : 2$ . Con esto tenemos que  $FG = \frac{1}{2}GC$  y  $DG = \frac{1}{2}GB$  y por lo tanto las medianas  $CF$  y  $BD$  se cortan en el punto  $G$  en la razón  $2 : 1$ . Haciendo un análisis similar se puede llegar a que la mediana que no consideramos se intersecta con cualesquiera de las dos medianas anteriores en un punto tal que quedan divididas en la razón  $2 : 1$ . Por esta razón tenemos que ese punto de intersección debe ser  $G$ , y de aquí concluimos que las tres medianas se intersectan en un punto. Tal punto es llamado *centroide* (gravicentro, baricentro, centro de gravedad) del triángulo y éste divide a las medianas en la razón  $2 : 1$ , a partir de los vértices.  $\square$



Ahora usaremos este teorema en la resolución de algunos problemas.

**Ejemplo 2.1.1** Sea  $G$  el centroide de un triángulo  $\triangle ABC$ , y sean  $M$ ,  $N$  y  $P$  los centroides de los triángulos  $\triangle BGC$ ,  $\triangle CGA$  y  $\triangle AGB$ , respectivamente. Demuestra que el triángulo  $\triangle MNP$  es semejante al triángulo  $\triangle ABC$ .



*Demostración.* Sean  $D$  y  $E$  los puntos medios de  $BG$  y  $CG$ , respectivamente. Tenemos que  $DE$  es paralelo a  $BC$ , además, como  $AP : PD = AN : NE = 2 : 1$  entonces  $PN$  es paralelo a  $DE$  y consecuentemente a  $BC$ . Análogamente,  $PM$  es paralelo a  $AC$  y  $MN$  es paralelo a  $AB$ . Como tenemos que  $\triangle MNP$  y  $\triangle ABC$  tienen sus lados paralelos, entonces son semejantes.  $\square$

**Ejemplo 2.1.2** Del punto  $M$ , situado en el interior del  $\triangle ABC$ , se trazan perpendiculares a los lados  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  y en ellas se marcan los segmentos  $MA_1$ ,  $MB_1$  y  $MC_1$  iguales a los correspondientes lados del triángulo. Demuestra que el punto  $M$  es el centro de gravedad del  $\triangle A_1B_1C_1$ .

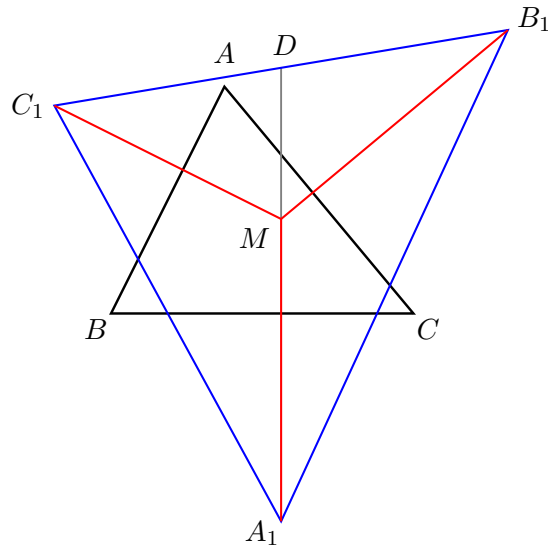
*Demostración.* Sea  $D$  el punto de intersección de la línea  $A_1M$  y el segmento  $C_1B_1$ . Tenemos que

$$\frac{C_1D}{DB_1} = \frac{|C_1DA_1|}{|B_1DA_1|} = \frac{|C_1DM|}{|B_1DM|} = \frac{|C_1DA_1| - |C_1DM|}{|B_1DA_1| - |B_1DM|},$$

esto es

$$\frac{C_1D}{DB_1} = \frac{|C_1MA_1|}{|B_1MA_1|}.$$

Por otro lado, tenemos que  $|C_1MA_1| = |ABC| = |B_1MA_1|$ , entonces  $C_1D = DB_1$ , es decir  $A_1D$  es una mediana del triángulo  $\triangle A_1B_1C_1$ . Análogamente se demuestra que  $C_1M$  y  $B_1M$  son medianas del triángulo  $\triangle A_1B_1C_1$ , por lo tanto  $M$  es el centroide de éste triángulo.  $\square$



Con lo demostrado anteriormente, tenemos que si  $G$  es un punto interior de un triángulo  $\triangle ABC$ , entonces éste será su centroide si y sólo si  $|ABM| = |BCM| = |CAM|$ .

**Ejemplo 2.1.3** Sea  $G$  el centroide de un triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

*Demostración.* Sean  $m_a, m_b, m_c$  las longitudes de las medianas desde los vértices  $A, B$  y  $C$ . Como sabemos que  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ ,  $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$  y  $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ , tenemos que

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2).$$

Se sigue que

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2). \quad \square$$

La fórmula utilizada en esta demostración se deja como ejercicio.

### 2.1.1. Problemas

**Problema 2.1** Demuestra que las medianas dividen el triángulo en seis partes de áreas iguales.

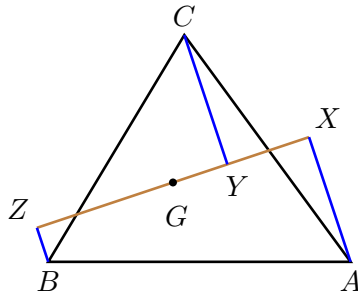
**Problema 2.2** Demuestra que el área del triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas de un triángulo dado, es igual a  $\frac{3}{4}$  del área del triángulo dado.

**Problema 2.3** Los lados de un triángulo son  $a, b$  y  $c$ . Demuestra que la longitud de la mediana  $m_a$ , trazada hacia el lado  $BC$ , se calcula por la fórmula

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

**Problema 2.4** Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales entonces el triángulo es isósceles.

**Problema 2.5** En un triángulo  $\triangle ABC$  se dibuja una línea que pasa por el centroide de éste. Se dibujan perpendiculares desde cada uno de los vértices del triángulo hacia esa línea, las cuales la intersectan en los puntos que se muestran en la figura siguiente. Demuestra que  $CY = AX + BZ$ .



**Problema 2.6** En un cuadrilátero convexo definiremos una mediana como la línea que une un vértice con el centroide del triángulo formado por los tres vértices restantes. Demuestra que las cuatro medianas en un cuadrilátero se intersectan en un punto y que además se dividen por éste en la razón 3 : 1.

**Problema 2.7** En un triángulo  $\triangle ABC$  con medianas  $AD$ ,  $BE$ , y  $CF$ , sea  $m = AD + BE + CF$ , y sea  $s = AB + BC + CA$ . Demuestra que

$$\frac{3}{2}s > m > \frac{3}{4}s.$$

**Problema 2.8** Demuestra que si en un triángulo se cumple que

$$m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$$

entonces éste es un triángulo rectángulo.

**Problema 2.9** En los lados  $CA$  y  $CB$  del triángulo  $\triangle ABC$ , fuera de él se construyen los cuadrados  $CAA_1C_1$  y  $CBB_1C_2$ . Demuestra que la mediana del triángulo  $\triangle CC_1C_2$  trazada por el vértice  $C$  es perpendicular al lado  $AB$  e igual a la mitad de su longitud.

**Problema 2.10** En los lados del triángulo, fuera de él, están contruidos los triángulos equiláteros  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle BA_1C$  y  $\triangle CAB_1$ . Demuestra que los centroides de los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A_1B_1C_1$  coinciden.

**Problema 2.11** Teorema de Leibniz. Supongamos que  $M$  es un punto arbitrario del plano,  $G$  el centroide del triángulo  $\triangle ABC$ . Entonces se cumple la igualdad

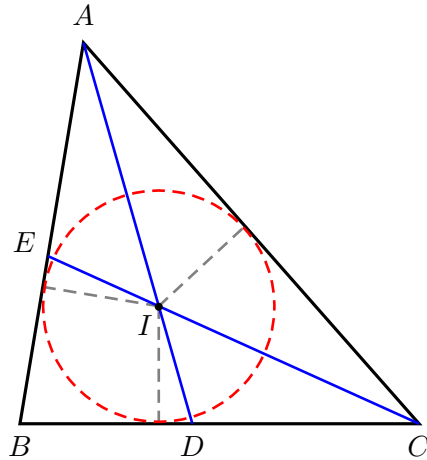
$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

**Problema 2.12** Consideremos el triángulo  $\triangle ABC$ . Sea  $E$  un punto sobre la mediana desde el vértice  $C$ . Una circunferencia a través de  $E$  toca al lado  $AB$  en  $A$  e intersecta a  $AC$  de nuevo en  $M$ . Otra circunferencia a través de  $E$  toca a  $AB$  en  $B$  e intersecta a  $BC$  de nuevo en  $N$ . Demuestra que el circuncírculo del triángulo  $\triangle CMN$  es tangente a las dos circunferencias anteriores.

## 2.2. Las bisectrices y el incentro

La recta que consideraremos en esta sección tiene muchas propiedades interesantes. Esta recta es la *bisectriz* (interior) de un ángulo y se define como el conjunto de puntos en el interior del ángulo los cuales equidistan de los lados de éste. Es muy sencillo ver que efectivamente este conjunto de puntos es una línea recta y que además ésta divide al ángulo en dos ángulos de la misma magnitud. De la misma manera que lo hicimos en la sección anterior, la primera propiedad que veremos es sobre la concurrencia de las tres bisectrices interiores de un triángulo.

**Teorema 2.2.1** Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo concurren en un punto, el cual es conocido como *incentro* y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



*Demostración.* Sean  $D$  y  $E$  los puntos donde las bisectrices internas de los ángulos  $\angle BAC$  y  $\angle BCA$  cortan a los lados  $BC$  y  $AB$ , y sea  $I$  el punto de intersección de los segmentos  $AD$  y  $CE$ . Como  $AD$  bisecta al  $\angle BAC$  entonces  $I$  equidista de los lados  $AB$  y  $AC$ ; además como  $I$  también pertenece al segmento  $CE$ , el cual bisecta al  $\angle BCA$ , entonces  $I$  equidista de los lados  $BC$  y  $AC$ . Como  $I$  equidista de los lados  $AB$  y  $BC$  entonces la bisectriz del  $\angle ABC$  también pasa por el punto  $I$ , por lo que las tres bisectrices concurren en este punto. Es claro que podemos trazar una circunferencia que sea tangente a los tres lados del triángulo y que tenga como centro al punto  $I$ .  $\square$

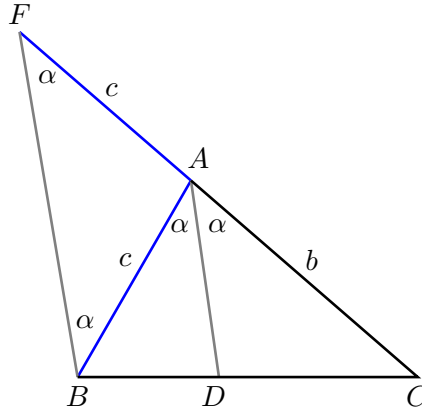
**Ejemplo 2.2.1** Sea  $D$  el punto donde la bisectriz del  $\angle BAC$  de un triángulo corta al lado  $BC$ , y sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Demuestra que

$$BD = \frac{ac}{b+c}.$$

*Demostración.* Un truco muy bonito y el cual puede ser muy útil en la mayoría de los problemas donde tenemos una suma de distancias, es el construir esa distancia. Por ejemplo, en nuestro problema necesitamos construir la distancia  $b+c$ . Prolonguemos  $CA$  hasta un punto  $F$  de tal manera que  $AF = AB = c$ , tenemos entonces que el triángulo  $\triangle FAB$  es un triángulo isósceles. Sea  $\angle BAC = 2\alpha$ , como  $\angle BFA + \angle ABF = 2\alpha$  tenemos que  $\angle BFA = \angle ABF = \alpha$ , esto implica

que  $FB$  es paralelo a  $AD$ . Ahora, por el Teorema de Tales tenemos que

$$\frac{BD}{FA} = \frac{BC}{FC} \implies BD = \frac{BC \cdot FA}{FC} = \frac{ac}{b+c}. \quad \square$$

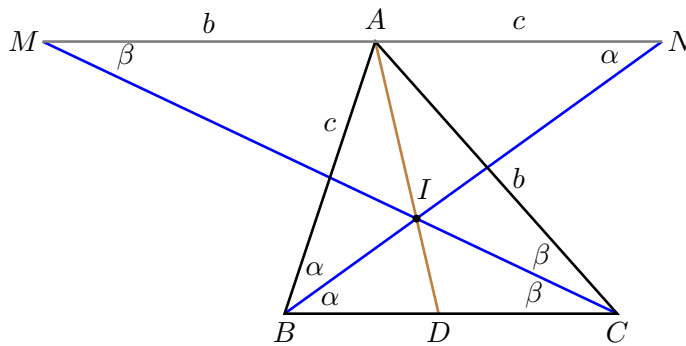


**Ejemplo 2.2.2** Sean  $a, b$  y  $c$  los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , de un triángulo  $\triangle ABC$ . Sea  $I$  el incentro y  $D$  el punto donde la bisectriz del  $\angle BAC$  corta al lado  $BC$ . Demuestra que

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

*Demostración.* Por  $A$  trazamos una paralela a  $BC$ . Las bisectrices de  $\angle B$  y  $\angle C$  intersectan a esta paralela en  $N$  y  $M$ , respectivamente. Como  $\angle AMC = \angle ACM = \beta$  tenemos  $AM = AC = b$ . Análogamente,  $AN = AB = c$ . Además, tenemos que  $\triangle IMN \sim \triangle ICB$ , esto implica que

$$\frac{AI}{ID} = \frac{MN}{BC} = \frac{b+c}{a}. \quad \square$$

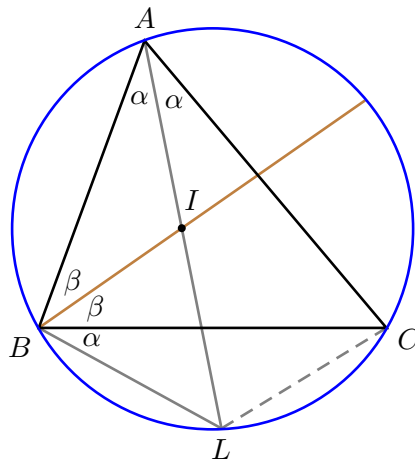




El resultado del siguiente ejemplo tiene una gran utilidad en la solución de problemas donde intervienen simultáneamente la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita.

**Ejemplo 2.2.3** Sea  $I$  el incentro de un triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle BIC$  está sobre la línea  $AI$ .

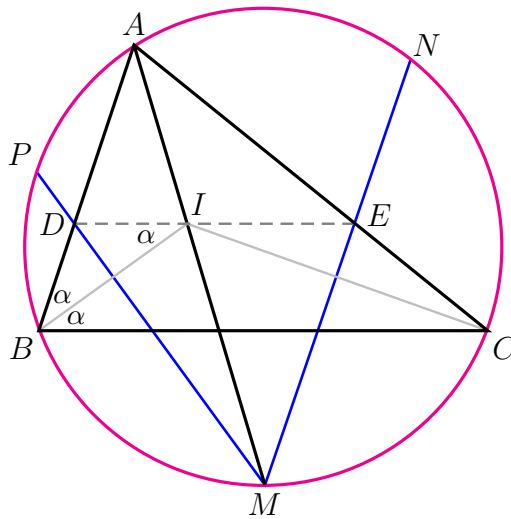
*Demostración.* Sea  $L$  el punto donde la bisectriz del  $\angle A$  intersecta al circuncírculo, entonces  $L$  es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle BIC$ . Para probar esto basta demostrar que  $LB = LI = LC$ . Tenemos que  $LB = LC$ , por ser cuerdas de arcos iguales. Por otro lado, tenemos que  $\angle BIL = \angle BAI + \angle ABI = \alpha + \beta$ , además tenemos que  $\angle CBL = \angle CAL = \alpha$  y con esto llegamos a que  $\angle IBL = \alpha + \beta$ . Hemos demostrado entonces, que el triángulo  $\triangle BIL$  es isósceles y con esto tenemos que  $LB = LI = LC$ .  $\square$



**Ejemplo 2.2.4** Sean  $M$ ,  $N$ , y  $P$ , los puntos medios de los arcos  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente, de la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle ABC$ .  $MP$  y  $MN$  intersectan en  $D$  y  $E$  a los lados  $AB$  y  $AC$ . Demuestra que  $DE$  es paralela a  $BC$  y que pasa por el incentro del triángulo  $\triangle ABC$ .

*Demostración.* Sea  $I$  el incentro del triángulo. Usando el resultado del ejemplo anterior, tenemos que  $PB = PI$  y  $MB = MI$ . Con esto tenemos que  $MP$

es perpendicular a  $BI$  la mediatriz de  $BI$ , lo que implica que  $BD = DI$  y  $\angle DBI = \angle DIB = \angle IBC$ , es decir,  $DI$  es paralela a  $BC$ . Análogamente, se demuestra que  $EI$  es paralela a  $BC$ . Por lo tanto,  $DE$  es paralela a  $BC$  y pasa por el incentro del triángulo  $\triangle ABC$ .  $\square$



### 2.2.1. Problemas

**Problema 2.13** Demuestra que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.

**Problema 2.14** Sea  $I$  el incentro de un triángulo  $\triangle ABC$ . Sea  $\angle BAC = \alpha$ . Demuestra que

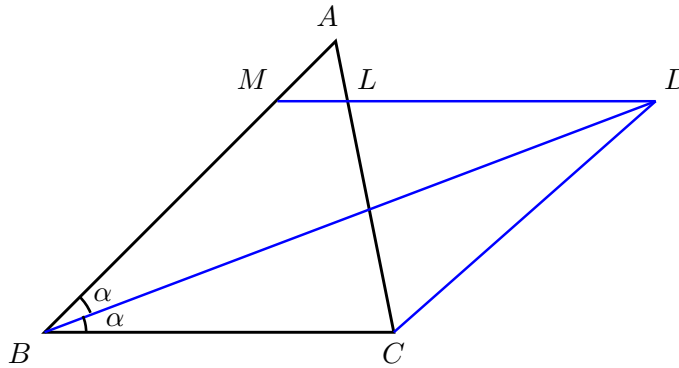
$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

**Problema 2.15** El cuadrilátero  $ABCD$  está circunscrito a una circunferencia con centro  $O$ . Demuestra que

$$\angle AOB + \angle COD = 180^\circ.$$

**Problema 2.16** Se da una circunferencia y un punto  $A$  fuera de ésta.  $AB$  y  $AC$  son tangentes a la circunferencia ( $B$  y  $C$  son los puntos de tangencia). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo  $\triangle ABC$  se halla en la circunferencia dada.

**Problema 2.17** La bisectriz interior de  $\angle B$  y la bisectriz exterior de  $\angle C$  de un  $\triangle ABC$  se intersectan en  $D$ . A través de  $D$  se traza una línea paralela a  $BC$  la cual intersecta  $AC$  en  $L$  y  $AB$  en  $M$ . Si las longitudes de  $LC$  y  $MB$  son 5 y 7, respectivamente. Encuentra la longitud de  $LM$ .

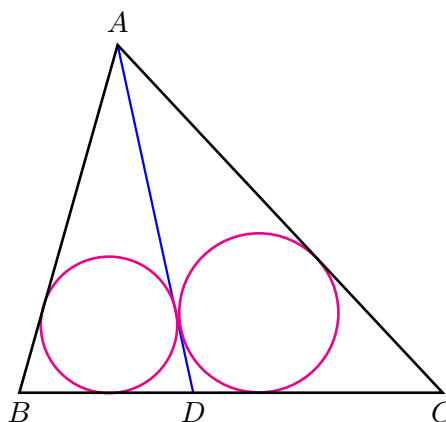


**Problema 2.18** En un triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $E$  y  $D$  puntos sobre los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente.  $BF$  bisecta el  $\angle ABD$ , y  $CF$  bisecta  $\angle ACE$ . Demuestra que  $\angle BEC + \angle BDC = 2\angle BFC$ .

**Problema 2.19** Sea  $r$  el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  con ángulo recto en  $C$ . Sean  $AB = c$ ,  $BC = a$  y  $CA = b$ . Demuestra que

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

**Problema 2.20** Sea  $D$  un punto en el lado  $BC$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que los incírculos de los triángulos  $\triangle ABD$  y  $\triangle ADC$  son tangentes entre sí, si y sólo si,  $D$  es el punto de tangencia del incírculo del triángulo  $\triangle ABC$ .



**Problema 2.21** Sobre la base  $AC$  del triángulo isósceles  $\triangle ABC$  se toma un punto  $M$  de manera que  $AM = a$ ,  $MC = b$ . En los triángulos  $\triangle ABM$  y  $\triangle CBM$  están inscritas circunferencias. Encuentra la distancia entre los puntos de tangencia del lado  $BM$  con esta circunferencias.

**Problema 2.22** Sea  $AD$  la bisectriz del  $\angle BAC$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

**Problema 2.23** Demuestra que si  $a$  y  $b$  son dos lados de un triángulo,  $\alpha$  es el ángulo entre estos y  $\ell$ , la bisectriz de éste ángulo, entonces

$$\ell = \frac{2ab \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{a + b}.$$

**Problema 2.24** La bisectriz del ángulo  $\angle BAC$  intersecta al lado  $BC$  en un punto  $D$  y al circuncírculo en un punto  $L$ . Sean  $\ell_D = AD$  y  $\ell_L = AL$ . Demuestra que  $\ell_D \cdot \ell_L = b \cdot c$ .

**Problema 2.25** Sean  $a, b$  y  $c$  las longitudes de los lados  $BC, CA$  y  $AB$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Sean  $I$  el incentro y  $G$  el gravicentro del  $\triangle ABC$ . Demuestra que  $IG$  es paralelo a  $BC$  si y sólo si  $2a = b + c$ .

**Problema 2.26** Las bisectrices de los ángulos  $A$  y  $B$  del triángulo  $\triangle ABC$  intersectan los lados  $BC$  y  $CA$  en los puntos  $D$  y  $E$ , respectivamente. Si se cumple que  $AE + BD = AB$ , determina el ángulo  $C$ .

**Problema 2.27** En un triángulo  $\triangle ABC$ ,  $\angle A = 60^\circ$  y las bisectrices  $BB'$  y  $CC'$  se intersectan en  $I$ . Demuestra que  $IB' = IC'$ .

**Problema 2.28** Demuestra que las cuatro proyecciones del vértice  $A$  del triángulo  $\triangle ABC$  sobre las bisectrices exteriores e interiores de los ángulos  $\angle B$  y  $\angle C$  son colineales.

**Problema 2.29** En los lados opuestos  $BC$  y  $DA$  de un cuadrilátero convexo se toman los puntos  $M$  y  $N$ , de tal manera que

$$BM : MC = AN : ND = AB : CD.$$

Demuestra que la recta  $MN$  es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados  $AB$  y  $CD$ .

**Problema 2.30** En los rayos  $AB$  y  $CB$  del triángulo  $\triangle ABC$  están trazados los segmentos  $AM$  y  $CN$  de tal manera que  $AM = CN = p$ , donde  $p$  es el semiperímetro del triángulo ( $B$  se halla entre  $A$  y  $M$ , así como entre  $C$  y  $N$ ). Sea  $K$  el punto de la circunferencia circunscrita el cual es diametralmente opuesto a  $B$ . Demuestra que la perpendicular trazada desde  $K$  sobre  $MN$  pasa por el incentro del triángulo  $\triangle ABC$ .

**Problema 2.31** Sea  $BC$  el diámetro de una circunferencia  $\Gamma$  que tiene centro  $O$ . Sea  $A$  un punto de  $\Gamma$  tal que  $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$ . Sea  $D$  el punto medio del arco  $\widehat{AB}$  que no contiene a  $C$ . La paralela a  $DA$  que pasa por  $O$  intersecta a  $AC$  en  $J$ . La perpendicular a  $OA$  por su punto medio intersecta a  $\Gamma$  en  $E$  y  $F$ . Prueba que  $J$  es el incentro del triángulo  $\triangle CEF$ .

**Problema 2.32** El triángulo  $\triangle ABC$  está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos  $\angle A$ ,  $\angle B$  y  $\angle C$ , cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente. Demuestra que

- (a)  $|DEF| \geq |ABC|$
- (b)  $DE + EF + FA \geq AB + BC + CA$
- (c)  $AD + BE + CF > AB + BC + CA$

**Problema 2.33** Dado el triángulo  $\triangle ABC$ , se traza una línea  $l$  paralela al lado  $AB$  la cual pasa por el vértice  $C$ . La bisectriz del ángulo  $\angle BAC$  intersecta el lado  $BC$  en  $D$  y a  $l$  en  $E$ . La bisectriz del ángulo  $\angle ABC$  intersecta el lado  $AC$  en  $F$  y a  $l$  en  $G$ . Si  $GF = DE$ , demuestra que  $AC = BC$ .

**Problema 2.34** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo con  $AB = AC$ . Las bisectrices de los ángulos  $\angle CAB$  y  $\angle ABC$  cortan a los lados  $BC$  y  $CA$  en  $D$  y  $E$ , respectivamente. Sea  $I$  el incentro del triángulo  $ADC$ . Supongamos que el ángulo  $\angle BEI = 45^\circ$ . Determinar todos los posibles valores de  $\angle CAB$ .

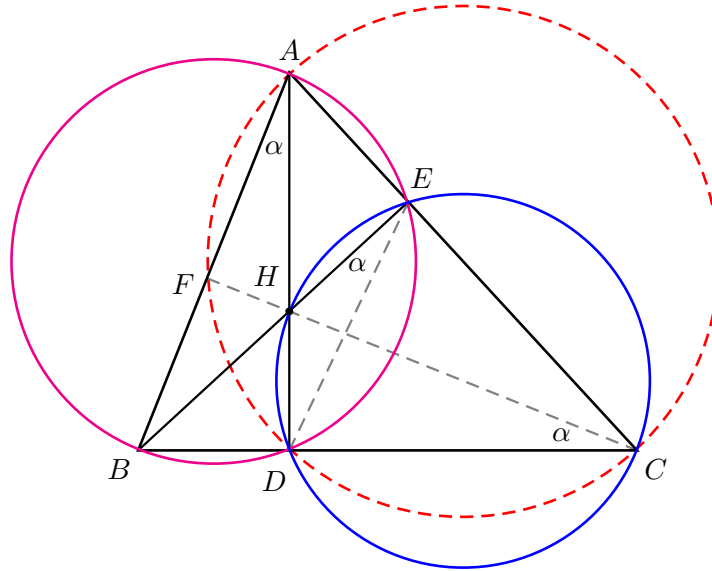
## 2.3. Las alturas y el ortocentro

En esta sección analizaremos las propiedades de las alturas del triángulo. Recordemos que la *altura* de un triángulo es la línea perpendicular a un lado trazada desde el vértice opuesto a este lado. Como en las anteriores líneas que hemos analizado, también se cumple:

**Teorema 2.3.1** Las alturas de un triángulo se intersectan en un punto.

*Demostración.* En el triángulo  $\triangle ABC$  sean  $D$  y  $E$  los pies de las alturas sobre los lados  $BC$  y  $AC$ , respectivamente, y sea  $H$  el punto de intersección de  $AD$  y  $BE$ . Se traza la línea  $CH$  la cual intersecta al lado  $AB$  en el punto  $F$ . Para demostrar que  $CF$  es una altura, bastará con demostrar que el cuadrilátero  $AFDC$  es cíclico, porque así de esta manera el  $\angle AFC$  sería igual al  $\angle ADC = 90^\circ$ . Para esto, como sabemos que  $\angle HDC = 90^\circ = \angle HEC$  entonces tenemos que el cuadrilátero  $HDCE$  es cíclico. De aquí se sigue que  $\angle HED = \angle HCD = \alpha$ . Por otro lado, el cuadrilátero  $BDEA$  también es cíclico ya que  $\angle BDA = 90^\circ =$

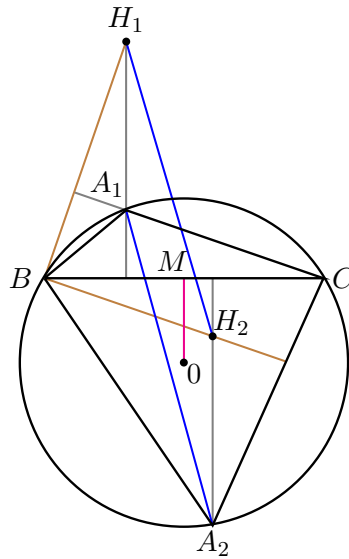
$\angle BEA$ , entonces  $\angle BAD = \angle BED = \alpha$ . Ahora, como  $\angle BAD = \angle FCB = \alpha$ , entonces se concluye que el cuadrilátero  $AFDC$  es cíclico y por lo tanto  $CF$  es una altura del triángulo  $\triangle ABC$ . El punto  $H$  es llamado *ortocentro* del triángulo.  $\square$



**Ejemplo 2.3.1** Dos triángulos  $\triangle A_1BC$  y  $\triangle A_2BC$  están inscritos en un círculo y tienen el lado  $BC$  en común. Sean  $H_1$  y  $H_2$  los ortocentros de los triángulos  $\triangle A_1BC$  y  $\triangle A_2BC$ , respectivamente. Demuestra que el segmento  $H_1H_2$  es igual y paralelo al segmento  $A_1A_2$ .

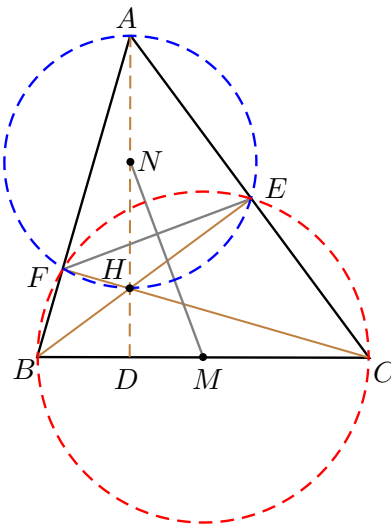
*Demostración.* Sean  $O$  el centro del círculo y  $M$  el punto medio de  $BC$ . Sabemos que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del centro de la circunferencia hacia el lado opuesto a ese vértice<sup>1</sup>, con esto tenemos que  $H_1A_1 = 2 \cdot OM$  y  $H_2A_2 = 2 \cdot OM$ , esto implica que  $H_1A_1 = H_2A_2$  y además como son paralelas, podemos concluir que  $H_1A_1A_2H_2$  es un paralelogramo.  $\square$

<sup>1</sup>Este resultado es bastante útil. Su demostración se deja como ejercicio en la siguiente sección.



**Ejemplo 2.3.2** Sean  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  las alturas de un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$  y sea  $H$  su ortocentro. Sea  $N$  el punto medio de  $AH$  y sea  $M$  el punto medio de  $BC$ . Demuestra que  $NM$  es perpendicular a  $FE$ .

*Demostración.* Sabemos que los cuadriláteros  $AFHE$  y  $FBCE$  son cíclicos y sus centros son  $N$  y  $M$ , respectivamente. Además, la cuerda  $FE$  es común a sus circunferencias. Como ya vimos que la cuerda común de dos circunferencias es perpendicular a la línea de sus centros, tenemos que  $NM \perp FE$ .  $\square$





### 2.3.1. Problemas

**Problema 2.35** Demuestra que en un triángulo los puntos simétricos al ortocentro, con respecto a los lados, están en la circunferencia circunscrita.

**Problema 2.36** Sea  $AD$  la altura de el triángulo  $\triangle ABC$ ,  $H$  el ortocentro. Demuestra que  $BD \cdot DC = AD \cdot DH$ .

**Problema 2.37** Demuestra que el producto de las partes en las cuales el ortocentro divide una altura, es el mismo para las tres alturas.

**Problema 2.38** Sea  $H$  el ortocentro de un triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que los circuncírculos de los cuatro triángulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle HBC$ ,  $\triangle HAC$  y  $\triangle HAB$ , tienen todos el mismo radio.

**Problema 2.39** Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico<sup>2</sup>.

**Problema 2.40** Sea  $H$  el ortocentro de el triángulo  $\triangle ABC$ . En la recta  $CH$  se toma un punto  $K$  tal que  $\triangle ABK$  es un triángulo rectángulo. Demuestra que

$$|ABK| = \sqrt{|ABC| \cdot |ABH|}$$

**Problema 2.41** El triángulo  $\triangle ABC$  está inscrito en una circunferencia. Las bisectrices interiores de los ángulos  $\angle A$ ,  $\angle B$  y  $\angle C$ , cortan a la circunferencia de nuevo en los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$ , respectivamente. Sea  $I$  el incentro del triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que  $I$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle DEF$ .

**Problema 2.42** Sea  $AD$  la altura desde  $A$  en el triángulo  $\triangle ABC$ . Sean  $X$  y  $Y$  los puntos medios de las otras dos alturas,  $H$  el ortocentro y  $M$  el punto medio de  $BC$ . Demuestra que el circuncírculo de  $\triangle DXY$  pasa por  $H$  y por  $M$ . También, demuestra que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DXY$  son semejantes.

<sup>2</sup>El triángulo órtico es el formado por los pies de las alturas.

**Problema 2.43** Sea  $l$  una recta que pasa por el ortocentro de un triángulo. Demuestra que las rectas simétricas a  $l$ , con respecto a los lados del triángulo, concurren en un punto.

**Problema 2.44** Sean  $E$  y  $F$  puntos sobre los lados  $BC$  y  $CD$ , respectivamente, de un cuadrado  $ABCD$ . Sean  $M$  y  $N$  las intersecciones de  $AE$  y  $AF$  con  $BD$ , y sea  $P$  la intersección de  $MF$  con  $NE$ . Si  $\angle EAF = 45^\circ$ , demuestra que  $AP$  es perpendicular a  $EF$ .

**Problema 2.45** Sea  $ABCD$  un rectángulo y sea  $P$  un punto sobre su circuncírculo, diferente de los vértices del rectángulo. Sea  $X, Y, Z$  y  $W$  las proyecciones de  $P$  sobre las líneas  $AB, BC, CD$ , y  $DA$ , respectivamente. Demuestra que uno de los puntos  $X, Y, Z$  ó  $W$  es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres.

**Problema 2.46**  $AD, BE$  y  $CF$  son las alturas de un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$ .  $K$  y  $M$  son puntos en los segmentos  $DF$  y  $EF$ , respectivamente. Demuestra que si los ángulos  $\angle MAK$  y  $\angle CAD$  son iguales, entonces  $AK$  bisecta el ángulo  $\angle FKM$ .

**Problema 2.47** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo acutángulo no isósceles. La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde  $A$  y  $C$  intersecta a  $AB$  en  $P$  y a  $BC$  en  $Q$ . La bisectriz del ángulo  $\angle ABC$  intersecta a la línea  $HN$  en  $R$ , donde  $H$  es el ortocentro y  $N$  el punto medio de  $AC$ . Demuestra que el cuadrilátero  $BRPQ$  es cíclico.

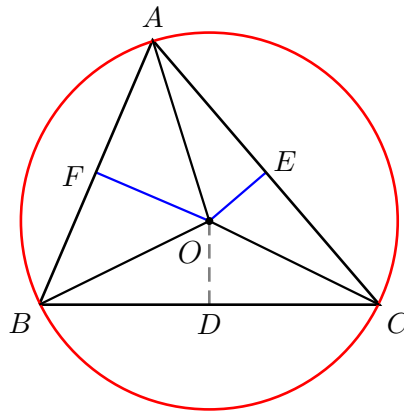
## 2.4. Las mediatrices y el circuncentro

Consideremos un segmento fijo  $AB$ . Ahora consideremos el conjunto de puntos que equidistan de los puntos  $A$  y  $B$ . Sean  $M$  el punto medio de  $AB$  y  $P$  uno de los puntos de tal conjunto. Dado que  $PA = PB$  y  $AM = MB$ , tenemos que  $PM \perp AB$ . De esta manera podemos observar que el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento  $AB$  es una línea perpendicular a  $AB$

por su punto medio. Esta línea se llama *mediatriz* del segmento. Primeramente demostramos que:

**Teorema 2.4.1** *Las mediatrices de los tres lados de un triángulo se intersectan en un punto. El punto de concurrencia es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo y es llamado circuncentro.*

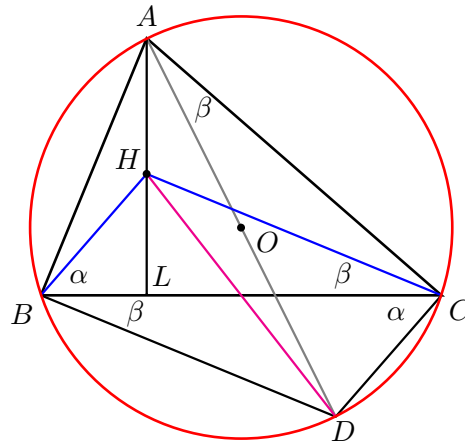
*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  el triángulo,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  los puntos medios de los lados  $BC$ ,  $CA$ , y  $AB$ , respectivamente. Trazamos las mediatrices de los lados  $AB$  y  $AC$  las cuales se intersectan en el punto  $O$ . Tenemos que  $AO = BO$ , por definición de mediatriz, y de la misma manera  $AO = CO$ . Como  $BO = CO$  entonces  $DO$  es mediatriz del lado  $BC$ , por lo que las tres mediatrices se intersectan en un punto el cual es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.  $\square$



**Ejemplo 2.4.1** *En un triángulo  $\triangle ABC$  sean  $H$  el ortocentro y  $O$  el circuncentro. Sea  $D$  el punto donde la línea  $AO$  intersecta al circuncírculo. Demuestra que  $HD$  bisecta el lado  $BC$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $\angle ADC = \angle ABC$  y  $\angle ACD = 90^\circ$ , entonces  $\beta = \angle CAD = 90^\circ - \angle ADC = 90^\circ - \angle ABC = \angle HCB$  y como  $\angle CBD = \angle CAD = \beta$ , tenemos que  $HC$  es paralela a  $BD$ . Por otro lado,  $\alpha = \angle BCD = \angle BAD = \angle BAC - \beta$ , y además como  $\angle BAL = 90^\circ - \angle ABC = \beta$ , tenemos que  $\angle HBC =$

$\angle LAC = \angle BAC - \beta = \alpha$ , entonces  $HB$  es paralela a  $CD$ . Tenemos entonces que  $HBDC$  es un paralelogramo y por lo tanto, sus diagonales se bisectan.  $\square$

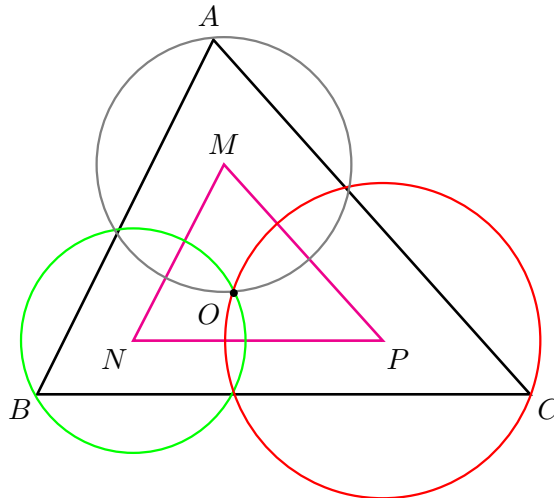


### 2.4.1. Problemas

**Problema 2.48** En un triángulo equilátero  $\triangle ABC$ , el punto  $K$  divide el lado  $AC$  en la razón  $2 : 1$  y el punto  $M$  divide al lado  $AB$  en la razón  $1 : 2$ . Demuestra que la longitud del segmento  $KM$  es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo  $\triangle ABC$ .

**Problema 2.49** Si  $s$ ,  $r$  y  $R$  son el semiperímetro, el inradio y el circunradio de un triángulo  $\triangle ABC$ , demuestra que  $abc = 4srR$ .

**Problema 2.50** Tres circunferencias tienen un punto común  $O$ . Los lados del triángulo  $\triangle ABC$  pasan por los otros puntos de intersección entre los pares de circunferencias, como se muestra en la figura. Demuestra que el triángulo formado por los centros de las circunferencias es semejante al triángulo  $\triangle ABC$ .



**Problema 2.51** En un triángulo  $\triangle ABC$  sean  $H$ ,  $O$  y  $M$ , el ortocentro, el circuncentro y el punto medio del lado  $BC$ , respectivamente. Demuestra que  $AH$  es el doble de  $OM$ .

**Problema 2.52** Sean  $M$  y  $N$  las proyecciones del ortocentro de un triángulo  $\triangle ABC$  sobre las bisectrices interior y exterior del ángulo  $\angle B$ . Demuestra que la línea  $MN$  bisecta al lado  $AC$ .

**Problema 2.53** En un triángulo  $\triangle ABC$  sea  $H$  el ortocentro,  $O$  el circuncentro, sea  $AL$  la bisectriz de el  $\angle BAC$ . Demuestra que  $AL$  bisecta el  $\angle HAO$ .

**Problema 2.54** Sean  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  las alturas de un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$  y sean  $H$  y  $O$  su ortocentro y circuncentro, respectivamente. La línea  $AO$  intersecta a  $CF$  en el punto  $P$ . Si  $FP = HE$ , demuestra que  $AB = BC$ .

**Problema 2.55** En un triángulo  $\triangle ABC$ , la bisectriz del ángulo  $\angle A$  intersecta al lado  $BC$  en  $U$ . Demuestra que la mediatriz de  $AU$ , la perpendicular a  $BC$  por  $U$  y el circundiámetro a través de  $A$  son concurrentes.

**Problema 2.56** En un triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $H$  y  $O$  su ortocentro y circuncentro, respectivamente. Sea  $M$  el punto medio de  $AB$ . Sea  $H_1$  el reflejado de

$H$  con respecto a  $C$  y sea  $C_1$  el reflejado de  $C$  con respecto a  $M$ . Demuestra que  $C_1$ ,  $O$  y  $H_1$  están alineados.

**Problema 2.57** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo tal que  $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD$ . Sean  $H$  y  $O$  el ortocentro y el circuncentro del triángulo  $\triangle ABC$ , respectivamente. Demuestra que  $H$ ,  $O$  y  $D$  son colineales.

**Problema 2.58** A través del ortocentro  $H$  de un triángulo  $\triangle ABC$ , se traza una paralela a  $AB$  la cual intersecta  $BC$  en  $D$ . También por  $H$  se traza una paralela a  $AC$  la cual intersecta a  $BC$  en  $E$ . Las perpendiculares a  $BC$  en  $D$  y  $E$  intersectan a  $AB$  y  $AC$  en  $D'$  y  $E'$ , respectivamente. Demuestra que  $D'E'$  intersecta al circuncírculo en los puntos  $B'$  y  $C'$  los cuales son diametralmente opuestos a los vértices  $B$  y  $C$ , respectivamente.

**Problema 2.59** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo acutángulo con  $AB \neq AC$ . El círculo con diámetro  $BC$  intersecta los lados  $AB$  y  $AC$  en  $M$  y  $N$ , respectivamente. Sea  $O$  el punto medio del lado  $BC$ . Las bisectrices de los ángulos  $BAC$  y  $MON$  se intersectan en  $R$ . Demuestra que los circuncírculos de los triángulos  $\triangle BMR$  y  $\triangle CNR$  tienen un punto común sobre el lado  $BC$ .

## 2.5. Las simedianas

Las líneas que analizaremos en esta sección quizá son un poco menos populares que las anteriores. Sin embargo, los resultados concernientes con ellas resultan de gran utilidad al resolver problemas en los cuales es necesario probar que alguna línea divide por la mitad algún segmento. Estas líneas llevan el nombre de *simedianas* y son definidas de la siguiente manera:

**Definición 2.5.1** Una recta simétrica a la mediana de un triángulo, con respecto a la bisectriz del mismo ángulo del cual parte la mediana, se llama simediana.

**Lema 2.5.1** Sean  $l$  y  $m$  dos líneas isogonales (que forman ángulos iguales con respecto a la bisectriz del ángulo) con respecto al ángulo  $\angle BAC$  de un

triángulo  $\triangle ABC$ . Sean  $P$  y  $Q$ , puntos sobre  $l$  y  $m$ , respectivamente. Entonces las distancias desde  $P$  hacia  $AB$  y  $AC$  son inversamente proporcionales a las respectivas distancias desde  $Q$  hacia  $AB$  y  $AC$ .

*Demostración.* Sean  $x$  e  $y$  las distancias desde  $P$  hacia  $AB$  y  $AC$ , respectivamente; y sean  $r$  y  $s$  las distancias desde  $Q$  hacia  $AB$  y  $AC$ , respectivamente. Sean también,  $D$  y  $E$  los pies de las perpendiculares desde  $P$  y sean  $F$  y  $G$  los pies de las perpendiculares desde  $Q$  como se muestra en la figura. Para demostrar el lema basta con probar que

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$

Para esto, tenemos que  $\triangle ADP \sim \triangle AQG$  y con esto

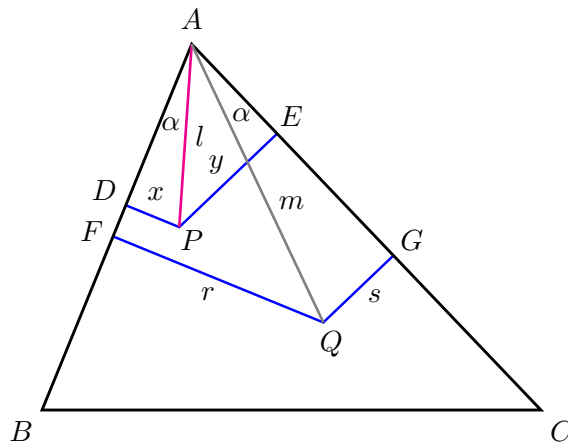
$$\frac{DP}{QG} = \frac{AP}{AQ},$$

también, como  $\triangle APE \sim \triangle AQF$  tenemos que

$$\frac{PE}{FQ} = \frac{AP}{AQ},$$

entonces

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}. \quad \square$$



Tenemos ahora el siguiente teorema, el cual resulta de gran utilidad al trabajar con simedianas:

**Teorema 2.5.1** Supongamos que la simediana que parte del vértice  $A$  del triángulo  $\triangle ABC$  corta a  $BC$  en el punto  $K$ . Entonces se cumple que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

*Demostración.* Sea  $M$  el punto medio del lado  $BC$  y sean  $x$ ,  $y$ ,  $r$  y  $s$  perpendiculares a los lados  $AB$  y  $AC$  como se muestra en la figura. Sabemos que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{|ABK|}{|AKC|} = \frac{AB \cdot x}{AC \cdot y}.$$

Por otro lado, de la igualdad  $|ABM| = |AMC|$  tenemos que

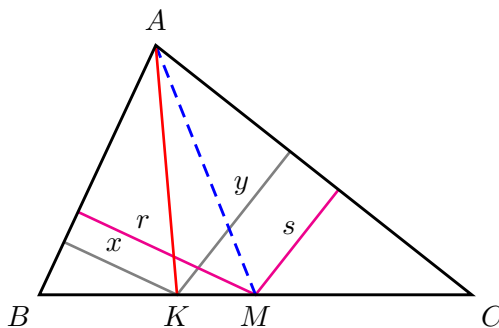
$$\frac{s}{r} = \frac{AB}{AC}.$$

Además, por el lema anterior tenemos que

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$

Con esto tenemos que

$$\frac{BK}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \quad \square$$



Ahora, ya estamos listos para demostrar el siguiente teorema sobre concurrencia de las simedianas:

**Teorema 2.5.2** Las tres simedianas de un triángulo concurren en un punto llamado punto simediano



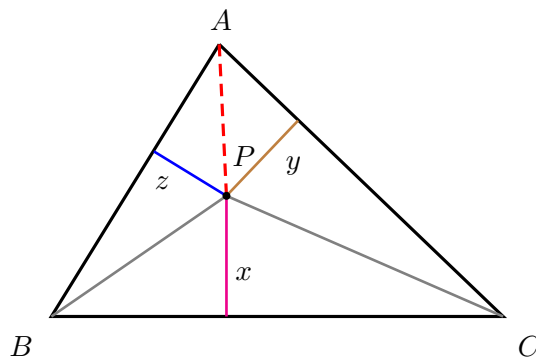
*Demostración.* Sea  $P$  el punto donde las simedianas desde los vértices  $B$  y  $C$  se intersectan. Sean  $x$ ,  $y$  y  $z$  las longitudes de las perpendiculares desde  $P$  sobre los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Del razonamiento en la demostración anterior tenemos que

$$\frac{z}{x} = \frac{AB}{BC} \quad \text{y} \quad \frac{x}{y} = \frac{BC}{AC}.$$

Multiplicando ambas expresiones tenemos que

$$\frac{z}{y} = \frac{AB}{AC},$$

lo que significa que el punto  $P$  pertenece a la simediana desde el vértice  $A$ .  $\square$

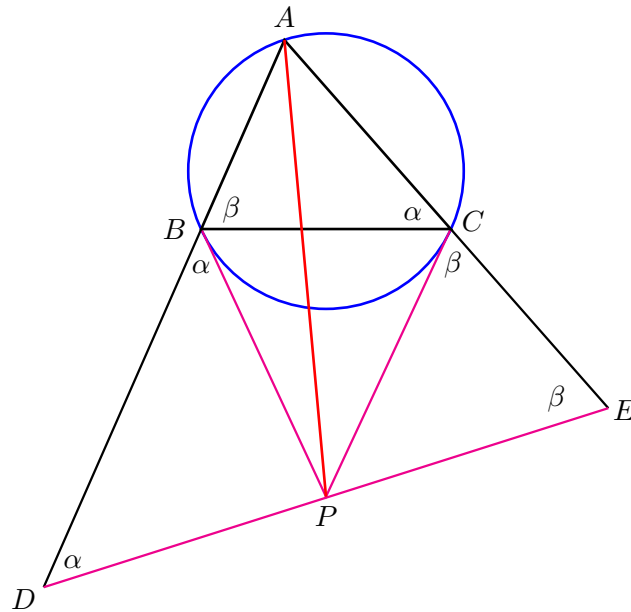


Ahora daremos una caracterización de la simediana de un triángulo, la cual en muchas ocasiones resulta ser de gran utilidad cuando interviene el circuncírculo del triángulo.

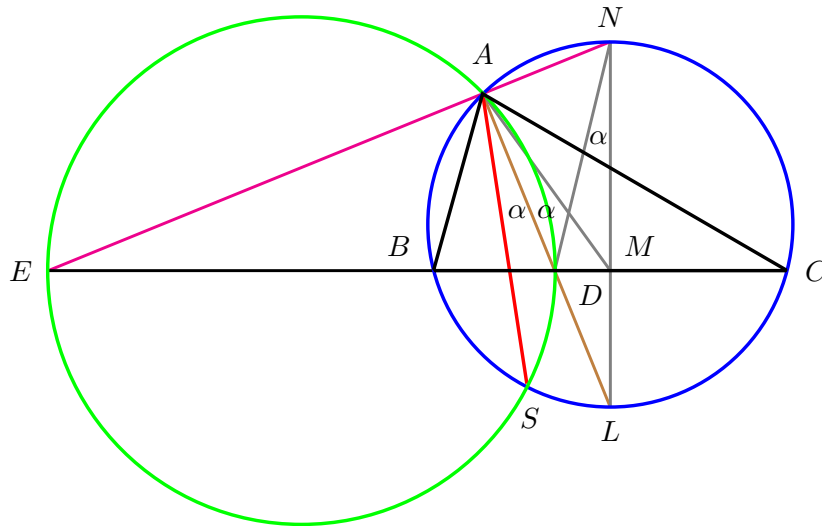
**Ejemplo 2.5.1** *Las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo  $\triangle ABC$  en los puntos  $B$  y  $C$  se intersectan en un punto  $P$ . Entonces tenemos que  $AP$  es la simediana del lado  $BC$ .*

*Demostración.* Por  $P$  trazamos una línea de manera que intersecte a la línea  $AB$  en un punto  $D$  tal que  $DP = BP$ . Esta misma línea intersecta a la línea  $AC$  en un punto  $E$ . Como  $\angle PBD = \angle ACB = \alpha$ , tenemos que  $\angle BDP = \alpha$ , lo cual implica que  $BDEC$  es un cuadrilátero cíclico. Entonces,  $\angle CEP = \angle ABC = \angle PCE = \beta$ , es decir,  $\triangle CPE$  es isósceles. Como  $BP = PC$ , tenemos que  $DP = PE$ , es decir,  $AP$  es la mediana del triángulo  $\triangle ADE$  y como  $\triangle ADE \sim$

$\triangle ABC$  tenemos que  $AP$  es la simediana del triángulo  $\triangle ABC$  trazada hacia el lado  $BC$ .  $\square$



**Ejemplo 2.5.2** Demuestra que las cuerdas comunes de la circunferencia circunscrita con las circunferencias de Apolonio de un triángulo dado son simedianas de este triángulo.



*Demostración.* Sabemos que la circunferencia de Apolonio del vértice  $A$  pasa por los pies de las bisectrices exterior e interior del mismo vértice. Sea  $E$  el pie de la bisectriz exterior y sea  $D$  el pie de la bisectriz interior, además, sea  $L$  el punto donde la bisectriz interior intersecta a la circunferencia circunscrita. Desde  $L$  trazamos la perpendicular a  $BC$ , la cual intersecta  $BC$  en el punto  $M$  y a la circunferencia circunscrita en  $N$ . La línea  $ND$  intersecta de nuevo al circuncírculo en un punto  $S$ . Sabemos que el cuadrilátero  $DMNA$  es cíclico, entonces  $\angle DNM = \angle DAM = \alpha$ , además  $\angle SAL = \angle SNL = \alpha$ . Con esto tenemos que  $AS$  es simediana del triángulo  $\triangle ABC$ , sólo falta probar que el cuadrilátero  $AESD$  es cíclico. Para esto, tenemos que  $\angle EAS = 90^\circ - \alpha$  y como  $\angle EDS = \angle MDN = 90^\circ - \alpha$ , tenemos que  $AESD$  es cíclico. Con esto hemos probado que  $AS$  es la cuerda común de la circunferencia de Apolonio y la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle ABC$ .  $\square$

### 2.5.1. Problemas

**Problema 2.60** *En un triángulo  $\triangle ABC$  sea  $D$  el punto donde la simediana, trazada hacia el lado  $BC$ , intersecta al circuncírculo de éste. Demuestra que la línea  $CB$  es simediana del triángulo  $\triangle ADC$ .*

**Problema 2.61** *El cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico. Los pies de las perpendiculares desde  $D$  hacia las líneas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , son  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , respectivamente. Demuestra que las bisectrices de los ángulos  $\angle ABC$  y  $\angle CDA$  se intersectan sobre la línea  $AC$  si y sólo si  $RP = RQ$ .*

**Problema 2.62** *La tangente a la circunferencia circunscrita de un triángulo  $\triangle ABC$  por el punto  $A$  intersecta a la línea  $BC$  en un punto  $P$ . Se traza la otra tangente a la circunferencia desde  $P$  y ésta la intersecta en un punto  $Q$ . Demuestra que  $AQ$  es simediana del triángulo  $\triangle ABC$ .*

**Problema 2.63** *Sea  $ABCD$  un cuadrilátero con  $AD$  paralelo a  $BC$ , los ángulos en  $A$  y  $B$  rectos y tal que el ángulo  $\angle CMD$  es recto, donde  $M$  es el punto medio de  $AB$ . Sean  $K$  el pie de la perpendicular a  $CD$  que pasa por  $M$ ,  $P$  el*

punto de intersección de  $AK$  con  $BD$  y  $Q$  el punto de intersección de  $BK$  con  $AC$ . Demuestra que el ángulo  $\angle AKB$  es recto y que

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

**Problema 2.64** Un hexágono convexo  $ABCDEF$  está inscrito en una circunferencia de tal manera que  $AB = CD = EF$  y las diagonales  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  concurren en un punto. Sea  $P$  el punto de intersección de  $AD$  y  $CE$ . Demuestra que

$$\frac{CP}{PE} = \left(\frac{AC}{CE}\right)^2.$$

**Problema 2.65** Sea  $N$  el punto de intersección de las tangentes a la circunferencia circunscrita de un triángulo  $\triangle ABC$  trazadas por los puntos  $B$  y  $C$ . Sea  $M$  un punto en la circunferencia de tal manera que  $AM$  es paralelo a  $BC$  y sea  $K$  el punto de intersección de  $MN$  con la circunferencia. Demuestra que  $KA$  divide  $BC$  por la mitad.

**Problema 2.66** Desde un punto  $A$  exterior a una circunferencia están trazadas las tangentes  $AM$  y  $AN$ . También desde  $A$  se traza una secante que corta la circunferencia en los puntos  $K$  y  $L$ . Trazamos una recta arbitraria  $l$  paralela a  $AM$ . Supongamos que  $KM$  y  $LM$  cortan  $l$  en los puntos  $P$  y  $Q$ . Demuestra que la recta  $MN$  divide el segmento  $PQ$  por la mitad.

**Problema 2.67** La recta  $\ell$  es perpendicular al segmento  $AB$  y pasa por  $B$ . La circunferencia con el centro situado en  $\ell$  pasa por  $A$  y corta  $\ell$  en los puntos  $C$  y  $D$ . Las tangentes a la circunferencia en los puntos  $A$  y  $C$  se intersectan en  $N$ . Demuestra que la recta  $DN$  divide el segmento  $AB$  por la mitad.

**Problema 2.68** Dos circunferencias se intersectan en dos puntos. Sea  $A$  uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos  $M$  y  $N$ . Sean  $P$  y  $Q$  los puntos de intersección de las rectas  $MA$  y  $NA$ , respectivamente, con la segunda circunferencia. Demuestra que la recta  $MN$  parte el segmento  $PQ$  por la mitad.

**Problema 2.69** Sea  $AD$  una altura de un triángulo  $\triangle ABC$ . Consideremos  $AD$  como diámetro de una circunferencia que corta los lados  $AB$  y  $AC$  en  $K$  y  $L$ , respectivamente. Las tangentes a la circunferencia en los puntos  $K$  y  $L$  se intersectan en un punto  $M$ . Demuestra que la recta  $AM$  divide  $BC$  por la mitad.

**Problema 2.70** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo en el que  $\angle B > 90^\circ$  y en el que un punto  $H$  sobre  $AC$  tiene la propiedad de que  $AH = BH$ , y  $BH$  es perpendicular a  $BC$ . Sean  $D$  y  $E$  los puntos medios de  $AB$  y  $BC$ , respectivamente. Por  $H$  se traza una paralela a  $AB$  que corta a  $DE$  en  $F$ . Demuestra que  $\angle BCF = \angle ACD$ .

**Problema 2.71** Un cuadrilátero convexo  $ABCD$  tiene  $AD = CD$  y  $\angle DAB = \angle ABC < 90^\circ$ . La recta por  $D$  y el punto medio de  $BC$  intersecta a la recta  $AB$  en un punto  $E$ . Demuestra que  $\angle BEC = \angle DAC$ .

**Problema 2.72** Se considera el triángulo  $\triangle ABC$  y su circunferencia circunscrita. Si  $D$  y  $E$  son puntos sobre el lado  $BC$  tales que  $AD$  y  $AE$  son, respectivamente, paralelas a las tangentes en  $C$  y en  $B$  a la circunferencia circunscrita. Demuestra que

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

**Problema 2.73** Las tangentes en  $B$  y  $C$  al circuncírculo de un triángulo  $\triangle ABC$  se cortan en  $X$ . Sea  $M$  el punto medio de  $BC$ . Demuestra que

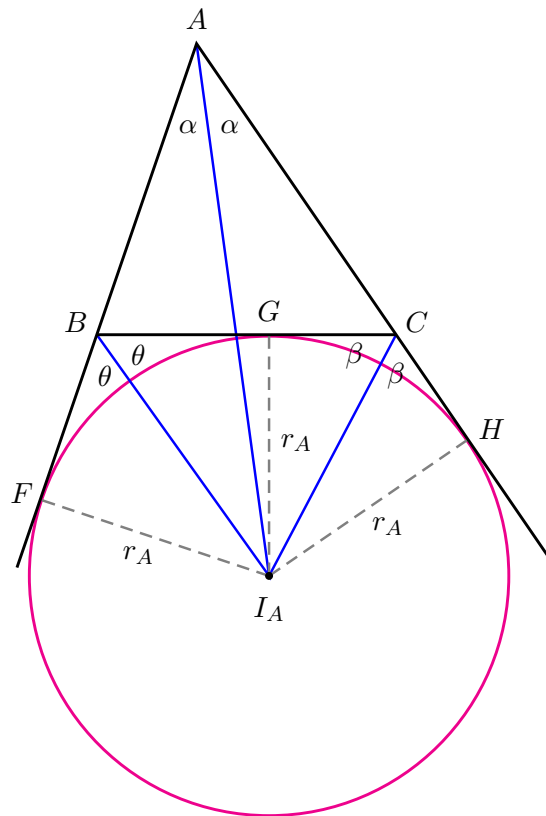
$$\angle BAM = \angle CAX \quad \text{y} \quad \frac{AM}{AX} = \cos(\angle BAC).$$

**Problema 2.74** Dado un triángulo  $\triangle ABC$  y su circuncírculo  $\Omega$ , denotaremos con  $A'$  el punto de intersección de las tangentes a  $\Omega$  en  $B$  y  $C$ . Definimos  $B'$  y  $C'$  de manera similar.

- (a) Demuestra que las líneas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  concurren.
- (b) Sea  $K$  el punto de concurrencia en (a) y sea  $G$  el centroide del triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que  $KG$  es paralela a  $BC$ , si y sólo si  $2a^2 = b^2 + c^2$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las longitudes de los lados del triángulo  $\triangle ABC$ .

## 2.6. Circunferencias ex-inscritas

Dado un triángulo existen 4 circunferencias que son tangentes a sus lados. Una de éstas, la cual vimos anteriormente, es la circunferencia inscrita, la cual tiene contacto con los lados en el interior. Sin embargo, si permitimos que las circunferencias tengan contacto con las prolongaciones de los lados, entonces tenemos tres posibilidades más. Estas circunferencias tienen contacto con uno de los lados en su interior y con los dos lados restantes en sus prolongaciones, y se les conoce con el nombre de *circunferencias ex-inscritas*. Veamos como se determinan:



Sea  $I_A$  el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo  $\angle A$  y la bisectriz exterior del ángulo  $\angle C$ . Como  $I_A$  pertenece a la bisectriz interior del ángulo  $\angle A$ , entonces equidista de los lados  $AB$  y  $AC$ , pero como también pertenece a la

bisectriz exterior del ángulo  $\angle C$  entonces equidista de los lados  $BC$  y  $AC$ . Lo anterior quiere decir que el punto  $I_A$  equidista de los lados  $AB$  y  $BC$ , esto es, que la bisectriz exterior del ángulo  $\angle B$  pasa por  $I_A$ , por lo tanto la bisectriz interior del ángulo  $\angle A$  y las bisectrices exteriores de los ángulos  $\angle B$  y  $\angle C$  concurren en un punto, al cual se le llama el *excentro* con respecto al vértice  $A$  y es denotado comúnmente como  $I_A$ . Sean  $F$ ,  $G$ , y  $H$  los pies de las perpendiculares desde  $I_A$  hacia los lados  $AB$ ,  $BC$ , y  $CA$ . Consideremos la distancia  $I_A G$  como radio e  $I_A$  como centro y trazemos una circunferencia la cual es tangente a  $AB$ ,  $BC$ , y  $CA$  en los puntos  $F$ ,  $G$ , y  $H$ . Esta circunferencia es precisamente la circunferencia ex-inscrita del lado  $BC$ . La distancia  $I_A G$  es el *exradio* y lo denotaremos como  $r_A$ .

**Ejemplo 2.6.1** Sea  $r$  el radio de la circunferencia inscrita en el  $\triangle ABC$  y sea  $r_A$  el radio de la circunferencia ex-inscrita del  $\triangle ABC$ , con respecto al lado  $a$ . Demuestra que

$$\frac{r}{r_A} = \frac{s - a}{s}$$

donde  $s$  es el semiperímetro del triángulo.

*Demostración.* En la figura anterior tenemos que  $AF = AH$ , además  $AF + AH = AB + BG + GC + CA = 2s$ , entonces  $AH = AF = s$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} |ABC| &= |AFI_A H| - |BFI_A H C| \\ &= |AFI_A H| - 2|BI_A C| \\ &= sr_A - ar_A \\ &= (s - a)r_A, \end{aligned}$$

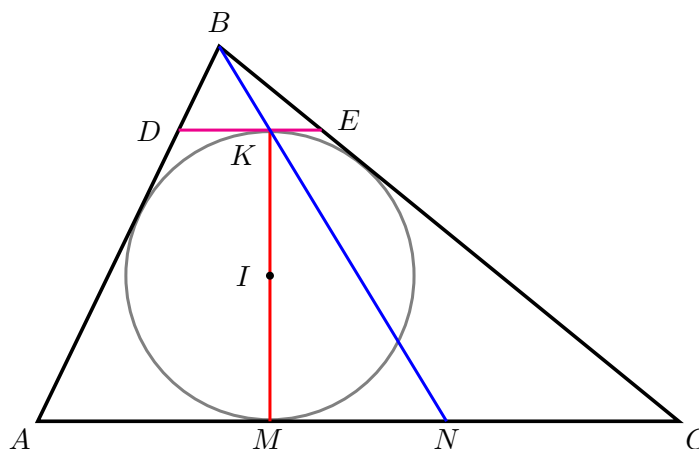
y como  $|ABC| = sr$ , entonces

$$(s - a)r_A = sr,$$

de donde obtenemos la igualdad deseada.  $\square$

**Ejemplo 2.6.2** El  $\triangle ABC$  tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que  $M$  es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado  $AC$ ,  $MK$  es el diámetro. La recta  $BK$  corta  $AC$  en el punto  $N$ . Demuestra que  $AM = NC$ .

*Demostración.* Por  $K$  trazamos la recta  $DE$  paralela a  $AC$ . El triángulo  $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ . Tenemos que la circunferencia inscrita en el triángulo  $\triangle ABC$  es la circunferencia ex-inscrita del triángulo  $\triangle BDE$  (respectiva al lado  $DE$ ), entonces  $N$  es el punto de tangencia de la circunferencia ex-inscrita del triángulo  $\triangle ABC$  con el lado  $AC$ . Tenemos que  $BC + CN = s$ , lo cual implica que  $NC = s - a$ , y como sabemos que  $AM = s - a$ , concluimos que  $AM = NC$ .  $\square$



### 2.6.1. Problemas

**Problema 2.75** Demuestra que el triángulo  $\triangle ABC$  es el triángulo órtico del triángulo  $\triangle I_A I_B I_C$ .

**Problema 2.76** Demuestra que

$$|ABC| = (s - a)r_A = (s - b)r_B = (s - c)r_C.$$

**Problema 2.77** Demuestra que

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{r}.$$

**Problema 2.78** Demuestra que



- (a)  $r_A + r_B + r_C + r = a + b + c$   
 (b)  $r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r^2 = a^2 + b^2 + c^2$

**Problema 2.79** Dado un triángulo  $\triangle ABC$ , sea  $S$  el área del triángulo con vértices en los puntos de contacto del incírculo con los lados del triángulo. Ahora, sea  $S_A$  el área del triángulo con vértices en los puntos de contacto del excírculo (con respecto al vértice  $A$ ) con los lados del triángulo. De manera similar definimos  $S_B$  y  $S_C$ . Demuestra que

$$\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} + \frac{1}{S_C} = \frac{1}{S}.$$

**Problema 2.80** Demuestra que

$$\tan\left(\frac{\angle A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

**Problema 2.81** Demuestra que

$$\tan\left(\frac{\angle A}{2}\right) \tan\left(\frac{\angle B}{2}\right) = \frac{r}{r_C}.$$

**Problema 2.82** Dado un  $\triangle ABC$ , por su vértice  $C$  pasan  $n - 1$  rectas  $CM_1, CM_2, \dots, CM_{n-1}$  que lo dividen en  $n$  triángulos menores  $\triangle ACM_1, \triangle M_1CM_2, \dots, \triangle M_{n-1}CB$  (los puntos  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  están sobre el lado  $AB$ ). Supóngase que  $r_1, r_2, \dots, r_n$  y  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  denotan, respectivamente, los radios de los círculos inscritos de esos triángulos y los círculos ex-inscritos que se encuentran dentro del ángulo  $\angle C$  de cada triángulo. Sean  $r$  y  $\rho$  los radios de los círculos inscrito y ex-inscrito del propio triángulo  $\triangle ABC$ . Probar que

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} \cdot \dots \cdot \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{r}{\rho}.$$

**Problema 2.83** Sea  $ABCD$  un trapecio isósceles, con  $AB$  paralelo a  $CD$ . La circunferencia inscrita del triángulo  $\triangle BCD$  intersecta  $CD$  en  $E$ . Sea  $F$  el punto sobre la bisectriz interna del ángulo  $\angle DAC$ , tal que  $EF \perp CD$ . El circuncírculo del triángulo  $\triangle ACF$  intersecta la línea  $CD$  en  $C$  y  $G$ . Demuestra que el triángulo  $\triangle AFG$  es isósceles.

**Problema 2.84** En un paralelogramo  $ABCD$  se trazan las circunferencias de centros  $O$  y  $O'$  y radios  $R$  y  $R'$  ex-inscritas a los triángulos  $\triangle ABD$  y  $\triangle BCD$ , relativas a los lados  $AD$  y  $CD$ , respectivamente.

- (a) Demuestra que las circunferencias son tangentes a  $BD$  en un mismo punto  $F$
- (b) Demuestra que  $D$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle OBO'$ .
- (c) Demuestra que  $FB \cdot FD = R \cdot R'$

**Problema 2.85** En un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$ , la bisectriz interna del ángulo  $\angle A$  intersecta la circunferencia circunscrita al triángulo  $\triangle ABC$  en  $A_1$ . Los puntos  $B_1$  y  $C_1$  son definidos de manera semejante. Sea  $A_0$  el punto de intersección de la línea  $AA_1$  con las bisectrices externas de los ángulos  $\angle B$  y  $\angle C$ . Los puntos  $B_0$  y  $C_0$  se definen de manera semejante. Demuestra que

$$(a) |A_0B_0C_0| = 2|AC_1BA_1CB_1|$$

$$(b) |A_0B_0C_0| \geq 4|ABC|$$

## 2.7. Teoremas de Ceva y Menelao

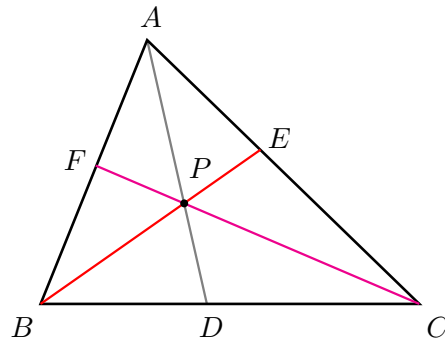
En esta sección veremos un par de teoremas que resultan de gran utilidad cuando tratamos con problemas sobre líneas concurrentes o puntos colineales. Estos teoremas son los conocidos *Teorema de Ceva* y *Teorema de Menelao*. Cada uno de ellos tiene una doble utilidad, ya que podemos aplicarlos ya sea para demostrar que ciertas líneas son concurrentes (ciertos puntos son colineales), o una vez que sabemos que ciertas líneas son concurrentes (puntos colineales) queremos obtener información sobre éstas.

Antes de enunciar los teoremas mencionados, introducimos el término *ceviana*. Decimos que dado un triángulo, una línea que pasa por alguno de sus vértices es una ceviana.

**Teorema 2.7.1** Teorema de Ceva. *Dado un triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $D$ ,  $E$  y  $F$  puntos sobre las líneas  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces, las cevianas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  concurren si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

*Demostración.* Demostraremos el teorema para el caso en que las cevianas intersectan a los lados en el interior de estos, como se muestra en la figura.



Supongamos primero que las líneas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son concurrentes en un punto  $P$ . Notemos que

$$\frac{|ABP|}{|APC|} = \frac{|ABD| - |BPD|}{|ADC| - |DPC|} = \frac{BD}{DC},$$

análogamente obtenemos,

$$\frac{|CBP|}{|ABP|} = \frac{CE}{EA} \text{ y } \frac{|APC|}{|CBP|} = \frac{AF}{FB}.$$

De esto obtenemos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{|APC|}{|CBP|} \cdot \frac{|ABP|}{|APC|} \cdot \frac{|CBP|}{|ABP|} = 1.$$

Supongamos ahora que los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  cumplen que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \quad (1)$$

Supongamos además que las líneas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  no son concurrentes. Consideremos el punto  $P$  donde se intersectan las líneas  $BE$  y  $CF$  y supongamos que la línea  $AP$  intersecta al lado  $BC$  en un punto  $D'$ . Dado que  $AD'$ ,  $BE$  y  $CF$  son concurrentes, por lo demostrado anteriormente tenemos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}.$$

De aquí se sigue que  $D' = D$ , ya que dada una razón sólo puede haber un punto que divida un segmento en esa razón.  $\square$

**Observación 2.7.1** *El signo positivo en 1 tiene verdadera importancia cuando se trabaja con segmentos dirigidos. Convencionalmente se considera que al dividir dos segmentos con el mismo sentido el resultado es positivo, así mismo, el resultado se considera negativo si los segmentos tienen sentido contrario. Sin embargo, para fines prácticos, el signo no importará, pero si debemos tomar en cuenta que esto significa que las tres razones son positivas o bien dos de ellas son negativas. Geométricamente esto significa que las tres cevianas intersectan a los lados en el interior o bien dos de ellas lo hacen en el exterior de los segmentos.*

Ahora enunciamos, sin demostración, el Teorema de Menelao. La demostración es análoga a la del Teorema de Ceva, sin embargo es importante mencionar que el valor  $-1$  en este caso significa que uno de los puntos o bien los tres, están en el exterior de los segmentos.

**Teorema 2.7.2** Teorema de Menelao. *Dado un triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $D$ ,  $E$  y  $F$ , puntos sobre las líneas  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces,  $D$ ,  $E$  y  $F$  son colineales si y sólo si*

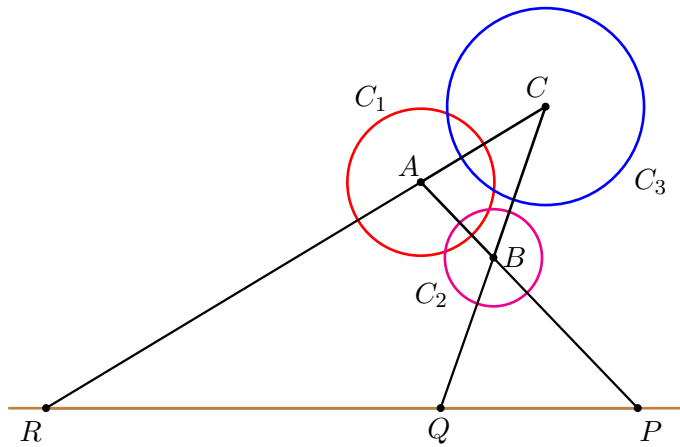
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1.$$

**Ejemplo 2.7.1** Sean  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  tres circunferencias de centros  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y radios  $a$ ,  $b$  y  $c$ , respectivamente. Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los puntos donde se intersectan las tangentes externas comunes de  $C_1$  y  $C_2$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , y  $C_3$  y  $C_1$ , respectivamente. Demuestra que  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son colineales.

*Demostración.* Observemos lo siguiente:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1.$$

Entonces se cumplen las hipótesis del Teorema de Menelao para el triángulo  $\triangle ABC$  con los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  sobre los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$ , respectivamente. Se sigue que los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son colineales.  $\square$



Como se mencionó al principio de ésta sección, los Teoremas de Ceva y de Menelao también puede ser utilizados para obtener información sobre líneas concurrentes o puntos colineales.

**Ejemplo 2.7.2** Sea  $P$  un punto sobre la mediana  $AD$  de un triángulo  $\triangle ABC$ . Sean  $M$  y  $N$  los puntos donde los rayos  $CP$  y  $BP$  intersectan a los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente. Demuestra que  $MN \parallel BC$ .

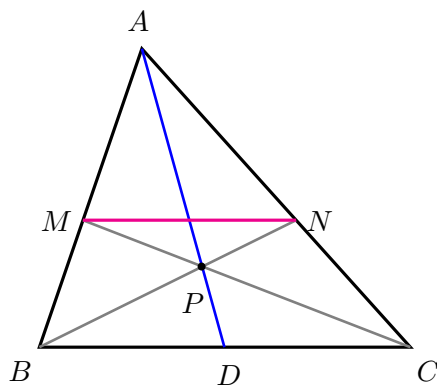
*Demostración.* Dado que las líneas  $AD$ ,  $BN$  y  $CM$  son concurrentes, podemos aplicar el Teorema de Ceva y obtenemos que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

Además, como  $\frac{BD}{DC} = 1$  se sigue que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{CN}{NA} = 1,$$

lo que implica que  $MN$  es paralelo a  $BC$ .  $\square$



### 2.7.1. Problemas

**Problema 2.86** Utilizando el teorema de Ceva demuestra que

- (a) Las medianas de un triángulo concurren.
- (b) Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo son concurrentes.
- (c) Las alturas de un triángulo son concurrentes.

**Problema 2.87** Si  $D, E, F$  son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo  $\triangle ABC$  con los lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente, demuestra que  $AD, BE, CF$  son concurrentes<sup>3</sup>.

**Problema 2.88** Sean  $D, E, F$ , los puntos de los lados  $BC, CA, AB$  del triángulo  $\triangle ABC$ , tales que  $D$  esté en la mitad del perímetro a partir de  $A, E$

<sup>3</sup>Este punto de concurrencia es llamado el punto de *Gergonne* del triángulo

en la mitad a partir de  $B$ , y  $F$  en la mitad a partir de  $C$ . Demuestra que  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  son concurrentes<sup>4</sup>.

**Problema 2.89** Sea  $ABCDEF$  un hexágono inscrito en un círculo. Demuestra que las diagonales  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son concurrentes si y sólo si

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

**Problema 2.90** Sean  $X$  y  $X'$  los puntos de un segmento rectilíneo  $MN$  simétricos con respecto al punto medio de  $MN$ . Entonces  $X$  y  $X'$  se llaman un par de puntos isotómicos del segmento  $MN$ . Demuestra que si  $D$  y  $D'$ ,  $E$  y  $E'$ ,  $F$  y  $F'$  son puntos isotómicos de los lados  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  del triángulo  $\triangle ABC$ , y si  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  son concurrentes, entonces  $AD'$ ,  $BE'$ ,  $CF'$  también son concurrentes.

**Problema 2.91** Sean  $OX$  y  $OX'$  rayos que pasan por el vértice  $O$  del ángulo  $\angle MON$  simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo  $\angle MON$ . Entonces  $OX$  y  $OX'$  se llaman un par de rectas isogonales para el ángulo  $\angle MON$ . Demuestra que si  $AD$  y  $AD'$ ,  $BE$  y  $BE'$ ,  $CF$  y  $CF'$ , son cevianas isogonales para los ángulos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  del triángulo  $\triangle ABC$ , y si  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  son concurrentes, entonces  $AD'$ ,  $BE'$ ,  $CF'$  también son concurrentes.

**Problema 2.92** Sean  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  tres cevianas concurrentes del triángulo  $\triangle ABC$ , y sea la circunferencia que pasa por  $D$ ,  $E$ ,  $F$  tal que corte a los lados  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  nuevamente en  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$ . Demuestra que  $AD'$ ,  $BE'$ ,  $CF'$  son concurrentes.

**Problema 2.93** Demuestra que las bisectrices de los ángulos externos de un triángulo cortan a los lados opuestos en tres puntos colineales.

**Problema 2.94** Dos paralelogramos  $ACBD$  y  $A'CB'D'$  tienen un ángulo común en  $C$ . Demuestra que  $DD'$ ,  $A'B$ ,  $AB'$  son concurrentes.

---

<sup>4</sup>Este punto de concurrencia se llama punto de Nagel del triángulo

**Problema 2.95** Sea  $A$  la proyección del centro de una circunferencia sobre una recta dada  $l$ . Consideremos los puntos  $B$  y  $C$  en  $l$  de manera que  $AB = AC$ . Por  $B$  y  $C$  se trazan dos secantes arbitrarias a la circunferencia las cuales la cortan en los puntos  $P, Q$  y  $M, N$ , respectivamente. Supongamos que las rectas  $NP$  y  $MQ$  cortan la recta  $l$  en los puntos  $R$  y  $S$ . Demuestra que  $RA = AS$ .

**Problema 2.96** Sea  $ABCD$  un paralelogramo y  $P$  un punto cualquiera. Por  $P$  trácense rectas paralelas a  $BC$  y a  $AB$  hasta que corten a  $BA$  y a  $CD$  en  $G$  y  $H$ , y a  $AD$  y  $BC$  en  $E$  y  $F$ . Demuestra que las rectas diagonales  $EG, HF, DB$  son concurrentes.

**Problema 2.97** Si se construyen los triángulos equiláteros  $\triangle BCA', \triangle CAB', \triangle ABC'$  exteriormente sobre los lados  $BC, CA, AB$  del triángulo  $\triangle ABC$ , demuestra que  $AA', BB', CC'$  son concurrentes en un punto  $P$ .

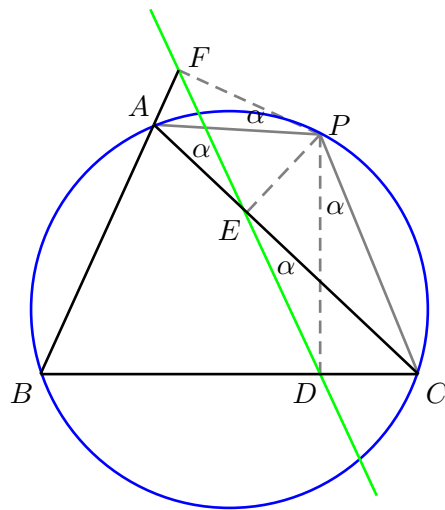
## 2.8. Teoremas de Euler y Simson

En esta sección veremos tres teoremas clásicos de geometría Euclidiana. Estos son conocidos con los nombres de: *Línea de Simson*, *Línea de Euler* y *Circunferencia de los 9 puntos*. A pesar de la belleza que estos poseen, sus demostraciones son sencillas.

**Teorema 2.8.1** Línea de Simson. Sea  $P$  un punto sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo. Entonces, los pies de las perpendiculares desde  $P$  hacia los lados del triángulo son colineales.

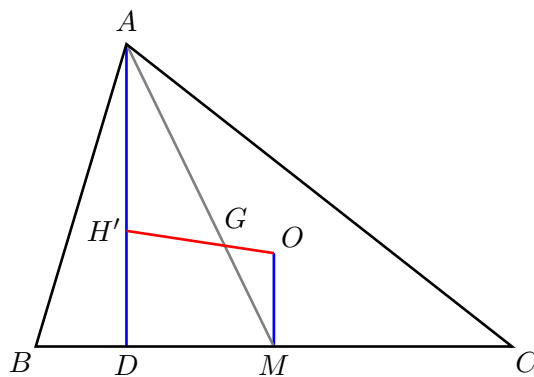
*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  el triángulo y sean  $D, E$  y  $F$  las proyecciones de  $P$  sobre los lados  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Tenemos que los cuadriláteros  $PABC, PFAE$  y  $PEDC$  son cíclicos. Además, como  $\angle PAF = \angle PCD$  tenemos que  $\angle APF = \angle CPD = \alpha$ . Ahora, utilizando que los cuadriláteros  $PFAE$  y  $PEDC$  son cíclicos tenemos que  $\angle AEF = \angle APF = \alpha$  y  $\angle CED = \angle CPD = \alpha$ . Con esto, hemos probado que los puntos  $D, E$  y  $F$  son colineales.  $\square$





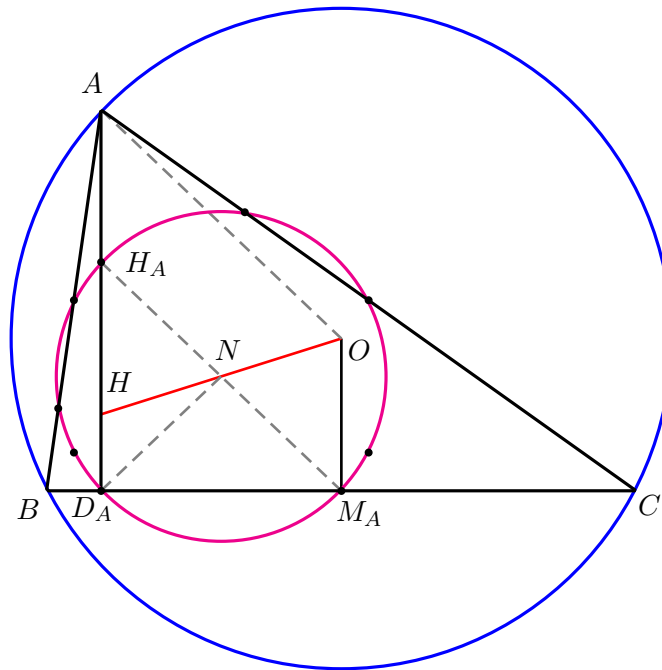
**Teorema 2.8.2** Línea de Euler. Sean  $H$ ,  $G$  y  $O$  el ortocentro, gravicentro y circuncentro de un triángulo. Entonces  $H$ ,  $G$  y  $O$  son colineales y se cumple que  $HG : GO = 2 : 1$ .

*Demostración.* Sea  $\triangle ABC$  el triángulo dado y sea  $M$  el punto medio del lado  $BC$ . Consideremos un punto  $H'$  sobre el rayo  $OG$  de tal manera que  $H'G = 2 \cdot GO$ . Sabemos además que  $AG = 2 \cdot GM$  y como  $\angle AGH' = \angle MGO$ , tenemos que los triángulos  $\triangle AGH'$  y  $\triangle MGO$  son semejantes y sus lados están en razón  $2 : 1$ . Con esto, tenemos que  $AH'$  es paralela a  $OM$  y por lo tanto, perpendicular a  $BC$ . Análogamente, se demuestra que  $BH' \perp AC$  y que  $CH' \perp AB$ , por lo tanto,  $H' = H$  es el ortocentro del triángulo  $\triangle ABC$ . Concluimos que  $H$ ,  $G$  y  $O$  están alineados y que  $HG : GO = 2 : 1$ .  $\square$



**Teorema 2.8.3** Circunferencia de los 9 puntos. Consideremos los siguientes 9 puntos: los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro. Estos 9 puntos están sobre una misma circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que une el circuncentro y el ortocentro, y su diámetro es igual al circunradio del triángulo.

*Demostración.* Sean  $H_A$ ,  $D_A$ ,  $M_A$ , el punto medio de  $AH$ , el pie de la altura desde  $A$ , el punto medio de  $BC$ , respectivamente. De manera análoga se definen  $H_B$ ,  $D_B$ ,  $M_B$ ,  $H_C$ ,  $D_C$ , y  $M_C$ . Sea  $N$  el punto medio de  $HO$ . Sabemos que  $AH = 2 \cdot OM_A$ , entonces  $H_AH = OM_A$  y además, como  $H_AH$  y  $OM_A$  son paralelas, tenemos que  $H_A$ ,  $N$  y  $M_A$  son colineales. También sabemos que  $ND_A = NH_A = NM_A$ , además,  $NH_A = \frac{1}{2}OA = R$ , donde  $R$  es el circunradio del triángulo  $\triangle ABC$ . Con esto tenemos que los puntos  $H_A$ ,  $D_A$  y  $M_A$  están a distancia  $\frac{R}{2}$  del punto  $N$ . Análogamente se demuestra que  $H_B$ ,  $D_B$ ,  $M_B$ ,  $H_C$ ,  $D_C$ , y  $M_C$  están a distancia  $\frac{R}{2}$  del punto  $N$ . Por lo tanto, los puntos  $H_A$ ,  $D_A$ ,  $M_A$ ,  $H_B$ ,  $D_B$ ,  $M_B$ ,  $H_C$ ,  $D_C$ , y  $M_C$  están sobre una circunferencia de radio  $\frac{R}{2}$  con centro en el punto medio de  $OH$ .  $\square$



### 2.8.1. Problemas

**Problema 2.98** *Demuestra que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia, es equivalente a la mitad del arco entre estos puntos.*

**Problema 2.99** *Sea  $P$  un punto sobre la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo  $\triangle ABC$ . La recta perpendicular a  $BC$ , la cual pasa por  $P$ , corta por segunda vez a la circunferencia en el punto  $M$ . Demuestra que la recta de Simson que corresponde al punto  $P$ , es paralela a la recta  $AM$ .*

**Problema 2.100** *Demuestra que la proyección del lado  $AB$  de un triángulo  $\triangle ABC$  sobre la recta de Simson que corresponde a un punto  $P$ , es igual a la distancia entre las proyecciones del punto  $P$  sobre los lados  $AC$  y  $BC$ .*

**Problema 2.101** *¿Qué lados corta la recta de Euler en los triángulos acutángulo y obtusángulo?*

**Problema 2.102** *Sea  $K$  un punto simétrico al circuncentro de un triángulo  $\triangle ABC$ , con respecto al lado  $BC$ . Demuestra que la línea de Euler en el triángulo  $\triangle ABC$  divide el segmento  $AK$  por la mitad.*

**Problema 2.103** *Sea  $P$  un punto interior a un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$ , tal que los ángulos  $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ . Demuestra que las líneas de Euler en los triángulos  $\triangle APB$ ,  $\triangle BPC$  y  $\triangle CPA$  se cortan en un punto.*

**Problema 2.104** *Demuestra que la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo dado, es la recta de Euler en el triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.*

**Problema 2.105** *Demuestra que las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de los lados de un triángulo, sobre las tangentes al circuncírculo en el*

vértice opuesto respectivo, concurren en el centro de la Circunferencia de los Nueve Puntos del triángulo.

**Problema 2.106** Sean  $H$  el ortocentro de un triángulo  $\triangle ABC$ ,  $D$  el punto medio del lado  $BC$  y  $P$  uno de los puntos de intersección de la recta  $HD$  con el circuncírculo del triángulo  $\triangle ABC$ . Demuestra que  $D$  es el punto medio de  $HP$ .

**Problema 2.107** En un triángulo  $\triangle ABC$ , sean  $BD$  la altura,  $BM$  la mediana, y  $P$  y  $Q$  las proyecciones de los puntos  $A$  y  $C$  sobre la bisectriz del ángulo  $\angle B$ . Demuestra que los puntos  $D$ ,  $M$ ,  $P$  y  $Q$  están sobre una circunferencia cuyo centro está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo  $\triangle ABC$ .

---

## Capítulo 3

# Algunas estrategias en Geometría

---

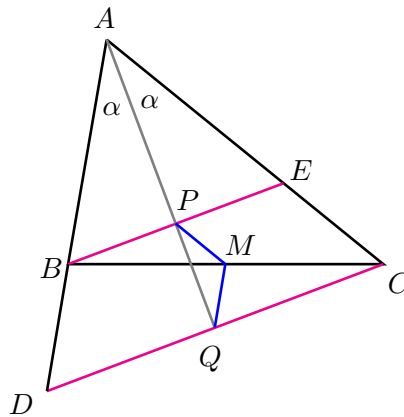
El objetivo en este capítulo es mostrar como algunos trazos pueden simplificar la solución de un problema que aparentemente es complicado. De hecho, algunas veces el trazo dibujado nos muestra cuál es el camino hacia la solución (o al menos uno de los caminos). Al principio, muchos de estos trazos pueden parecer artificiales y como decimos comúnmente *sacados de la manga*, sin embargo, hay ciertos grupos de problemas para los cuales el mismo tipo de construcción resulta muy útil. Es por esto que en este capítulo se ha tratado de mostrar algunas de estas estrategias y se han agrupado algunos problemas que se resuelven con esas mismas estrategias. Esto, con la finalidad de que se logre cierta familiaridad con los *trucos* y dejen de ser eso precisamente y se conviertan en *técnicas* rutinarias. De lograr este objetivo, se habrá logrado el verdadero objetivo del libro completo. Como última recomendación quizá debería decir lo siguiente: *recordemos que ninguna idea está aislada de las demás, es decir, si combinamos varias estrategias las posibilidades de éxito serán mayores.*

### 3.1. Prolongar segmentos

La primer *estrategia* o *truco* que veremos es la *prolongación de segmentos*. Algunas veces al prolongar ciertos segmentos podemos encontrar algunos detalles que nos facilitan la solución del problema al que nos estamos enfrentando:

**Ejemplo 3.1.1** En un triángulo  $\triangle ABC$  sea  $\ell$  la bisectriz del ángulo  $\angle A$ .  $BP$  es perpendicular a  $\ell$ ,  $CQ$  es perpendicular a  $\ell$ , y  $M$  es el punto medio de  $BC$ . Demuestra que  $MP = MQ$ .

*Demostración.* Prolongamos  $BP$  y  $CQ$  hasta que intersecten a  $AC$  y  $AB$  en  $E$  y  $D$ , respectivamente. Sabemos que los triángulos  $\triangle ABE$  y  $\triangle ADC$  son isósceles, entonces  $BD = EC$ . Como  $P$  y  $M$  son puntos medios de los segmentos  $BE$  y  $BC$ , respectivamente, tenemos que  $PM$  es paralela a  $EC$  y además  $PM = \frac{1}{2}EC$ . Análogamente, tenemos que  $MQ = \frac{1}{2}BD$  y con esto tenemos que  $PM = MQ$ .  $\square$



En ocasiones nos conviene prolongar los segmentos hasta obtener una longitud, la cual es mencionada en el problema:

**Ejemplo 3.1.2** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , de un triángulo  $\triangle ABC$ . Sea  $I$  el incentro y  $D$  el punto donde la bisectriz del  $\angle BAC$  corta al lado  $BC$ . Demuestra que

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

*Demostración.* Observemos que la longitud  $b + c$  aparece en la igualdad que queremos demostrar, entonces, prolongamos el rayo  $CA$  hasta el punto  $E$  de tal manera que  $EA = AB = c$ . Así, hemos construido el segmento  $EC = b + c$ . Como el triángulo  $\triangle EAB$  es isósceles, tenemos que  $\angle BEA + \angle EBA = 2\alpha = \angle BAC$ . Se sigue que  $EB$  es paralela a  $AD$ . Aplicando el Teorema de la Bisectriz al triángulo  $\triangle ADC$  tenemos que

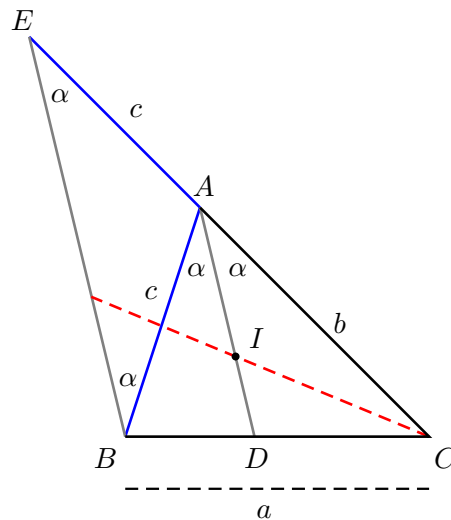
$$\frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD},$$

además

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EC}{BC} = \frac{b+c}{a}.$$

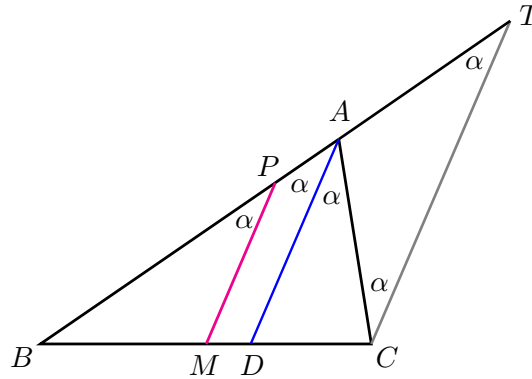
Por lo tanto

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}. \quad \square$$



**Ejemplo 3.1.3** Dado un triángulo  $\triangle ABC$  tenemos que  $AB > AC$ . Sea  $M$  el punto medio de  $BC$ . La bisectriz del  $\angle BAC$  corta al lado  $BC$  en el punto  $D$ . Por  $M$  se traza una línea la cual corta al lado  $AB$  en el punto  $P$ . Si  $BP = PA + AC$ , demuestra que  $MP$  es paralela a  $AD$ .

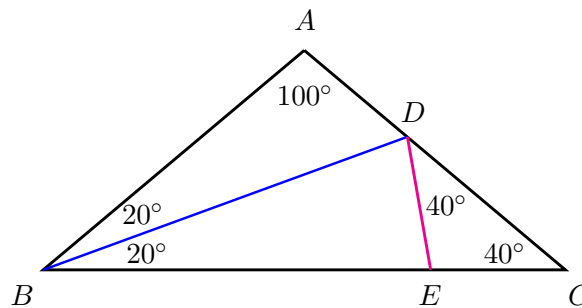
*Demostración.* Prolongamos el lado  $BA$  hasta el punto  $T$  de manera que  $AT = AC$ . Sea  $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$ . Como el triángulo  $\triangle TAC$  es isósceles tenemos que  $\angle ATC + \angle ACT = \angle BAC = 2\alpha$ , entonces  $\angle ATC = \angle ACT = \alpha$ . De lo anterior, tenemos que  $CT$  es paralela a  $AD$ , además, como  $BP = PA + AC = PA + AT = PT$  tenemos que  $PM$  es paralela a  $TC$  y por lo tanto paralela a  $AD$ .  $\square$



También puede ocurrir que resulte más útil considerar un punto en el interior de un segmento de tal manera que se nos forme algún triángulo isósceles:

**Ejemplo 3.1.4** En un triángulo  $\triangle ABC$ ,  $\angle BAC = 100^\circ$ ,  $AB = AC$ . Se elige un punto  $D$  en el lado  $AC$  de modo que  $\angle ABD = \angle CBD$ . Demuestra que  $AD + DB = BC$ .

*Demostración.* Consideremos un punto  $E$  sobre  $BC$  de tal manera que  $BE = BD$ . Como  $\angle BED = \angle ECD + \angle EDC = 80^\circ$  tenemos que  $\angle EDC = 40^\circ$ , entonces  $DE = EC$ . Basta probar que  $AD = DE$ . Como tenemos que el cuadrilátero  $ABED$  es cíclico y  $\angle ABD = \angle EBD = 20^\circ$ , entonces  $AD = DE$  y así  $BD + AD = BD + DE = BE + EC = BC$ .  $\square$



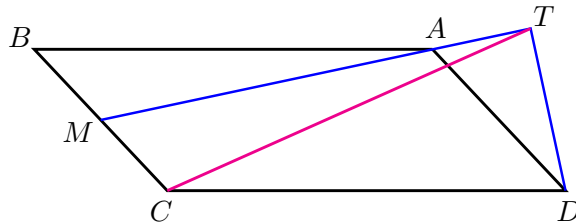


## 3.1.1. Problemas

**Problema 3.1** Lo mismo que en el ejemplo 3.1.1 pero ahora  $\ell$  es una línea arbitraria que pasa por el vértice  $A$ .

**Problema 3.2** En un triángulo escaleno  $\triangle ABC$  se traza la bisectriz interior  $BD$ , con  $D$  sobre  $AC$ . Sean  $E$  y  $F$ , respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde  $A$  y  $C$  hacia la recta  $BD$ , y sea  $M$  el punto sobre el lado  $BC$  tal que  $DM$  es perpendicular a  $BC$ . Demuestra que  $\angle EMD = \angle DMF$ .

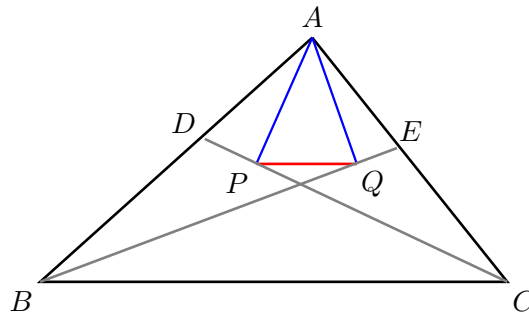
**Problema 3.3** En un paralelogramo  $ABCD$ ,  $M$  es el punto medio de  $BC$ .  $DT$  es dibujada desde  $D$  y perpendicular a  $MA$ , como se muestra en la figura. Demuestra que  $CT = CD$ .



**Problema 3.4** En un triángulo  $\triangle ABC$  sean  $H$  el ortocentro,  $O$  el circuncentro, sea  $AL$  la bisectriz de el ángulo  $\angle BAC$ . Demuestra que  $AL$  bisecta el  $\angle HAO$ .

**Problema 3.5** Sea  $XY$  una cuerda de longitud constante la cual se desliza sobre un semicírculo. Sea  $M$  el punto medio de la cuerda,  $C$  y  $D$  las proyecciones de los puntos  $X$  y  $Y$  sobre el diámetro  $AB$ . Prueba que el triángulo  $\triangle MCD$  es isósceles y nunca cambia su forma.

**Problema 3.6** En un triángulo  $\triangle ABC$  se trazan las bisectrices de los ángulos  $\angle ABC$  y  $\angle ACB$  y éstas intersectan los lados  $AC$  y  $AB$  en los puntos  $E$  y  $D$ , respectivamente. Consideramos los puntos  $P$  y  $Q$  sobre las líneas  $CD$  y  $BE$ , respectivamente, de manera que  $AP \perp CD$  y  $AQ \perp BE$ . Demuestra que  $PQ$  es paralelo a  $BC$ .



**Problema 3.7** Está dada la circunferencia  $\Omega$ . Desde un punto exterior  $P$  se trazan dos líneas tangentes a  $\Omega$  las cuales la tocan en  $A$  y  $B$ . También por  $P$  se traza una secante  $\ell$  a  $\Omega$ . Desde el centro de  $\Omega$  se traza una recta perpendicular a  $\ell$  la cual corta a  $\Omega$  en el punto  $K$  y a  $\ell$  en  $C$  (el segmento  $BK$  corta a  $\ell$ ). Demuestra que  $BK$  bisecta el ángulo  $\angle ABC$ .

**Problema 3.8** Sea  $M$  un punto sobre el arco  $\widehat{CB}$  (el cual no contiene a  $A$ ) de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero  $\triangle ABC$ . Demuestra que  $BM + CM = AM$ .

**Problema 3.9** Sobre los lados  $AB$  y  $AC$  de un triángulo  $\triangle ABC$  se construyen hacia afuera los cuadrados  $ABNM$  y  $CAPQ$ . Sea  $D$  el punto medio del lado  $BC$ . Demuestra que  $PM = 2 \cdot AD$ .

**Problema 3.10** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo con  $\angle BCA = 60^\circ$  y  $AC < BC$ . El punto  $D$  está sobre el lado  $BC$  y cumple  $BD = AC$ . El lado  $AC$  es extendido hasta el punto  $E$  donde  $AC = CE$ . Demuestra que  $AB = DE$ .

**Problema 3.11** En el triángulo  $\triangle ABC$  con  $AB > AC$ ,  $D$  es el punto medio del lado  $BC$ ;  $E$  está sobre el lado  $AC$ . Los puntos  $P$  y  $Q$  son los pies de las perpendiculares desde  $B$  y  $E$  a la línea  $AD$ . Demuestra que  $BE = AE + AC$  si y sólo si  $AD = PQ$ .

**Problema 3.12** Una circunferencia tiene su centro en el lado  $AB$  de un cuadrilátero cíclico  $ABCD$ . Los otros tres lados son tangentes a la circunferencia. Demuestra que  $AD + BC = AB$ .

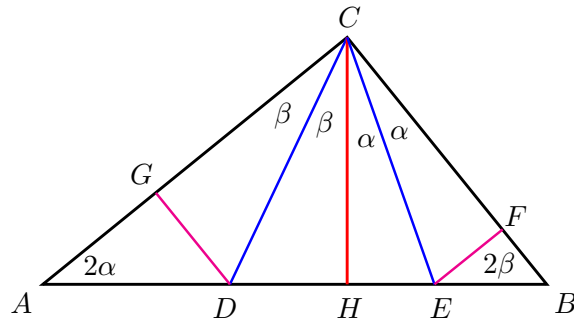
**Problema 3.13** El ángulo  $\angle BAC$  es el menor de los ángulos del triángulo  $\triangle ABC$ . Los puntos  $B$  y  $C$  dividen a la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea  $U$  un punto interior del arco  $\widehat{BC}$  que no contiene a  $A$ . Las mediatrices de  $AB$  y  $AC$  cortan a la recta  $AU$  en  $V$  y  $W$ , respectivamente. Las rectas  $BV$  y  $CW$  se cortan en  $T$ . Demuestra que  $AU = TB + TC$ .

**Problema 3.14** En un triángulo  $\triangle ABC$  sea  $AP$  la bisectriz de  $\angle BAC$  con  $P$  sobre  $BC$ , y sea  $BQ$  la bisectriz de  $\angle ABC$  con  $Q$  sobre  $CA$ . Se sabe que  $BAC = 60^\circ$  y que  $AB + BP = AQ + QB$ . ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos el triángulo  $\triangle ABC$ ?

## 3.2. Trazar perpendiculares y paralelas

En muchas ocasiones, al trazar una perpendicular o una paralela a algún segmento, obtenemos triángulos que poseen propiedades útiles en la solución de un problema.

**Problema 3.15** Sean  $E$  y  $D$  puntos sobre la hipotenusa  $AB$  de un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$ , con ángulo recto en  $C$ . Los puntos  $F$  y  $G$  están sobre los lados  $CB$  y  $CA$  de tal manera que  $BD = BC$ ,  $AE = AC$ ,  $EF \perp BC$ , y  $DG \perp AC$ . Demuestra que  $DE = EF + DG$ .

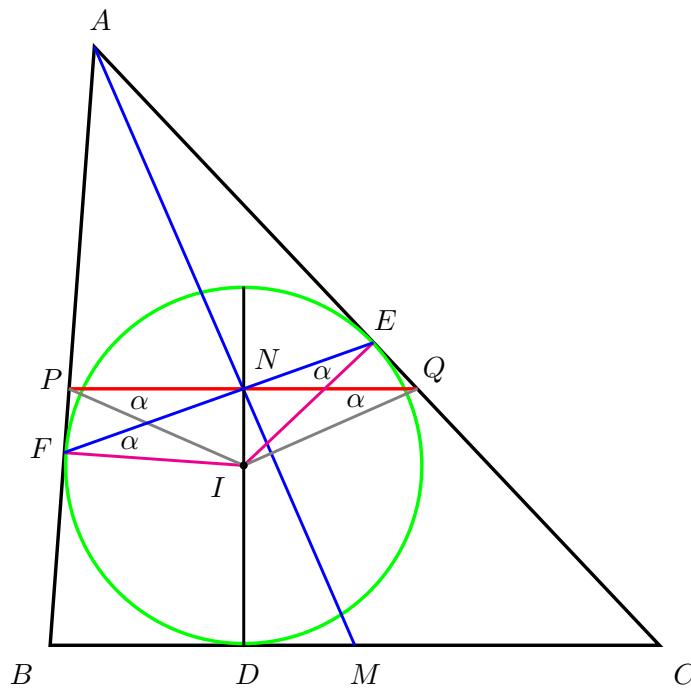


*Demostración.* Se traza la perpendicular a  $AB$  desde  $C$  y supongamos que ésta interseca a  $AB$  en  $H$ . Sean  $\angle CAB = 2\alpha$  y  $\angle ABC = 2\beta$ . Como el triángulo  $\triangle CAE$  es isósceles tenemos que  $\angle CEA = 90^\circ - \alpha$ , por lo que  $\angle HCE = \alpha$ . Por

suma de ángulos en el triángulo  $\triangle ABC$  obtenemos que  $\angle ECB = \alpha$ . Además, tenemos que el cuadrilátero  $CHEF$  es cíclico y como  $\angle HCE = \angle ECF = \alpha$ , se sigue que  $HE = EF$ . Análogamente se obtiene que  $GD = DH$ , por lo tanto,  $DE = EF + DG$ .  $\square$

**Ejemplo 3.2.1** *El incírculo del triángulo  $\triangle ABC$  toca los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  en los puntos  $F$ ,  $D$  y  $E$ , respectivamente. El diámetro del incírculo, el cual pasa por el punto  $D$ , intersecta al segmento  $EF$  en el punto  $N$ . Demuestra que la línea  $AN$  divide al lado  $BC$  por la mitad.*

*Demostración.* Por  $N$  trazamos el segmento  $PQ$  paralelo a  $BC$ , como se muestra en la figura. Bastará entonces demostrar que el triángulo  $\triangle PIQ$  es isósceles. Como  $ID$  es perpendicular a  $BC$  ( $I$  es el incentro del triángulo) tenemos que  $\angle DNP = \angle DNQ = 90^\circ$ , además, como los ángulos  $\angle IFP$  e  $\angle IEQ$  también son rectos, tenemos que los cuadriláteros  $IFPN$  e  $INEQ$  son cíclicos. De aquí obtenemos que  $\angle IPN = \angle IFN = \alpha$  e  $\angle IQN = \angle IEN = \alpha$ , es decir,  $\angle IPN = \angle IQN = \alpha$ . Esto implica que el triángulo  $\triangle PIQ$  es isósceles. Lo cual queríamos demostrar.  $\square$



**Ejemplo 3.2.2** En los lados opuestos  $BC$  y  $DA$  de un cuadrilátero convexo se toman los puntos  $M$  y  $N$ , de tal manera que  $BM : MC = AN : ND = AB : CD$ . Demuestra que la recta  $MN$  es paralela a la bisectriz del ángulo formado por los lados  $AB$  y  $CD$ .

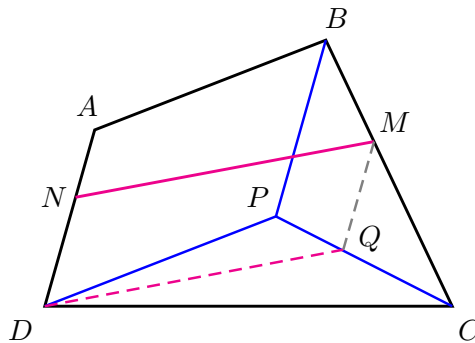
*Demostración.* Por  $B$  y  $D$  se trazan paralelas a  $AD$  y  $AB$ , respectivamente, las cuales se intersectan en el punto  $P$ . Por  $M$  se traza un paralela a  $BP$  la cual intersecta a  $PC$  en el punto  $Q$ . Tenemos que

$$\frac{MQ}{BP} = \frac{CM}{CB} = \frac{DN}{DA}$$

y como  $BP = AD$  entonces  $MQ = ND$ , además  $MQ$  es paralelo a  $ND$  y con esto tenemos que  $NMQD$  es un paralelogramo. También tenemos que

$$\frac{PQ}{QC} = \frac{BM}{MC} \implies \frac{PQ}{QC} = \frac{AB}{DC} = \frac{DP}{DC}.$$

Por el Teorema de la Bisectriz tenemos que  $DQ$  bisecta el ángulo  $\angle PDC$  y como  $NM$  es paralela a  $DQ$ , concluimos que  $NM$  es paralela a la bisectriz del ángulo formado por las rectas  $AB$  y  $DC$ .  $\square$

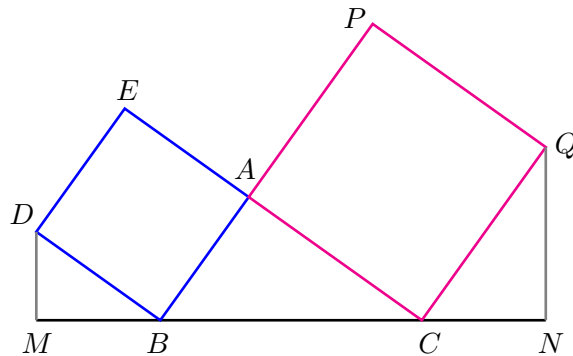


### 3.2.1. Problemas

**Problema 3.16** En un triángulo  $\triangle ABC$ , la altura  $CE$  es extendida hasta  $G$  de tal manera que  $EG = AF$ , donde  $AF$  es la altura trazada hacia  $BC$ . Una línea a través de  $G$  y paralela a  $AB$  intersecta  $CB$  en  $H$ . Demuestra que  $HB = AB$ .

**Problema 3.17** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo. Tomando como diámetros los lados del cuadrilátero y con centro en los puntos medios de éstos, se construyen cuatro circunferencias. Demuestra que estas cuatro circunferencias cubren completamente al cuadrilátero.

**Problema 3.18** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo rectángulo con ángulo recto en  $A$ . Se construyen los cuadrados  $ABDE$  y  $CAPQ$  como se muestra en la figura siguiente. Se trazan las perpendiculares  $DM$  y  $QN$  hacia el lado  $BC$ . Demuestra que  $DM + QN = BC$ .



**Problema 3.19** En un triángulo isósceles  $\triangle ABC$ , con  $AB = AC$ , se extiende  $CB$  a través de  $B$  hasta un punto  $P$ . Una línea desde  $P$ , paralela a la altura  $BF$ , interseca  $AC$  en  $D$ . Se dibuja  $PE$  perpendicular a  $AB$ . Demuestra que  $BF + PE = PD$ .

**Problema 3.20** Sean  $AB$  y  $CD$  dos cuerdas perpendiculares en una circunferencia de radio  $R$ . Demuestra que  $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .

**Problema 3.21** Un trapecio  $ABCD$ , con  $AB$  paralelo a  $CD$ , tiene sus diagonales  $AC$  y  $BD$  mutuamente perpendiculares. Demuestra que

$$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2.$$

**Problema 3.22** Sea  $O$  un punto en el interior de un triángulo equilátero  $\triangle ABC$  con lados de longitud  $a$ . Las líneas  $AO$ ,  $BO$  y  $CO$  intersecan los lados en los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$ . Demuestra que  $OA_1 + OB_1 + OC_1 < a$ .

**Problema 3.23** Sea  $P$  un punto en el interior de un triángulo equilátero  $\triangle ABC$ . Desde  $P$  se bajan las perpendiculares  $PD$ ,  $PE$  y  $PF$  a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Encuentra

$$\frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}.$$

**Problema 3.24** Se toma un punto  $P$  en el interior de un rectángulo  $ABCD$  de tal manera que  $\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$ . Encuentra la suma de los ángulos  $\angle DAP$  y  $\angle BCP$ .

**Problema 3.25** Sean  $MN$ ,  $PQ$ ,  $RS$  tres segmentos iguales en los lados de un triángulo equilátero. Demuestra que en el triángulo formado por las líneas  $QR$ ,  $SM$  y  $NP$ , los segmentos  $QR$ ,  $SM$  y  $NP$ , son proporcionales a los lados en los que están contenidos.

**Problema 3.26** En el cuadrilátero convexo  $ABCD$ , las diagonales  $AC$  y  $BD$  son perpendiculares y los lados opuestos  $AB$  y  $DC$  no son paralelos. El punto  $P$ , intersección de las mediatrices de  $AB$  y  $DC$ , está en el interior del cuadrilátero  $ABCD$ . Demuestra que los vértices de  $ABCD$  están en una misma circunferencia si y sólo si los triángulos  $\triangle ABP$  y  $\triangle CDP$  tienen áreas iguales.

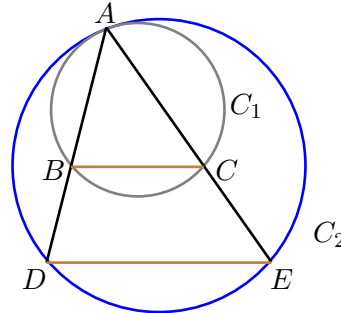
**Problema 3.27** Sea  $ABCDEF$  un hexágono convexo tal que  $AB$  es paralelo a  $ED$ ,  $BC$  es paralelo a  $FE$  y  $CD$  es paralelo a  $AF$ . Sean  $R_A$ ,  $R_C$  y  $R_E$  los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos  $\triangle FAB$ ,  $\triangle BCD$  y  $\triangle DEF$ , respectivamente; y sea  $p$  el perímetro del hexágono. Demuestra que

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

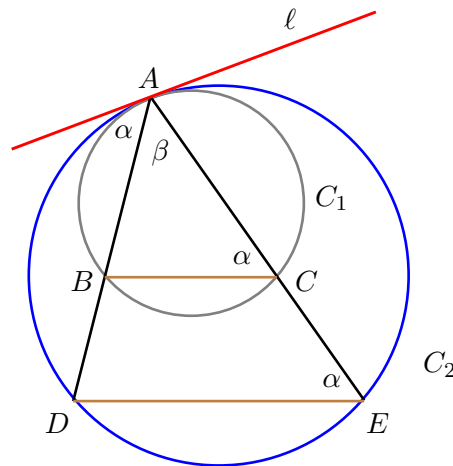
### 3.3. Trazar tangentes y cuerdas comunes

Cuando tenemos dos circunferencias tangentes, ya sea la tangencia interior o exterior, en ocasiones es muy útil trazar la línea tangente a las dos circunferencias la cual pasa por el punto común de ellas:

**Ejemplo 3.3.1** Las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  son tangentes en el punto  $A$ , como se muestra en la figura. A partir del punto  $A$  se trazan dos rectas las cuales intersectan a  $C_1$  y  $C_2$  en los puntos  $B, C, D$  y  $E$  como se muestra en la figura. Demuestra que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle ADE$  son semejantes.



*Demostración.* Sea  $\ell$  la tangente común a  $C_1$  y  $C_2$  por el punto  $A$ , y sea  $\alpha$  el ángulo formado por  $\ell$  y  $AD$ . De esta manera se han formado dos ángulos semi-inscritos que intersectan los arcos  $\widehat{BA}$  y  $\widehat{DA}$  en  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. Como los ángulos  $\angle ACB$  y  $\angle AED$  intersectan los arcos  $\widehat{BA}$  y  $\widehat{DA}$ , tenemos que  $\angle ACB = \angle AED = \alpha$ . De aquí se sigue que  $BC \parallel DE$ , por lo tanto, los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle ADE$  son semejantes.  $\square$



Un trazo que podríamos considerar obligatorio es el siguiente: siempre que tengamos dos circunferencias que se cortan en dos puntos, debemos trazar *la cuerda común*.



**Ejemplo 3.3.2** *Dos circunferencias se intersectan en los puntos  $A$  y  $B$ . Por el punto  $A$  se han trazado los segmentos  $AC$  y  $AD$ , cada uno de los cuales, siendo cuerda de una circunferencia, es tangente a la segunda circunferencia. Demuestra que  $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$ .*

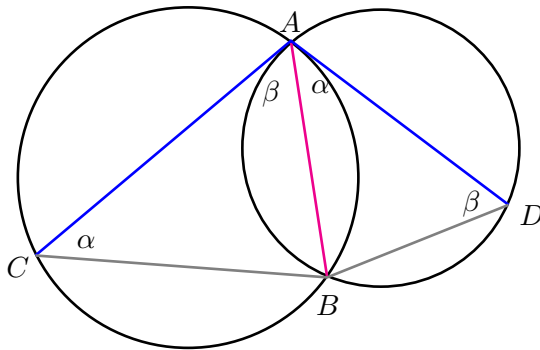
*Demostración.* Trazamos la cuerda común  $AB$ . Con esto obtenemos que  $\angle ACB = \angle DAB = \alpha$ , ya que ambos ángulos interceptan el arco  $\widehat{AB}$  en la primera circunferencia. Análogamente, obtenemos que  $\angle ADB = \angle CAB = \beta$ . Con estas dos igualdades de ángulos obtenemos que los triángulos  $\triangle ACB$  y  $\triangle DAB$  son semejantes. Tenemos entonces que

$$\frac{AC}{DA} = \frac{AB}{DB} = \frac{CB}{AB}.$$

De aquí se deriva que:

$$\left(\frac{AC}{DA}\right)^2 = \frac{AB \cdot CB}{DB \cdot AB} = \frac{CB}{DB},$$

de donde se obtiene fácilmente la igualdad deseada.  $\square$

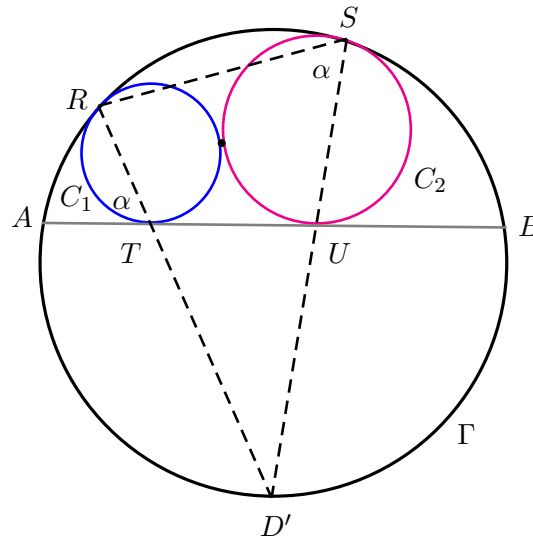


**Ejemplo 3.3.3** *Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias las cuales son tangentes exteriormente en un punto  $I$ , y sea  $\Gamma$  una circunferencia la cual es tocada internamente por  $C_1$  y  $C_2$  en los puntos  $R$  y  $S$ , respectivamente. Sea  $AB$  la cuerda de  $\Gamma$  la cual es tangente exterior a  $C_1$  y  $C_2$  en  $T$  y  $U$ , respectivamente. La tangente común en  $I$  a  $C_1$  y  $C_2$  intersecta a  $\Gamma$  en  $C$  y  $D$ , con  $C$  sobre el mismo lado de  $AB$  que  $I$ .*

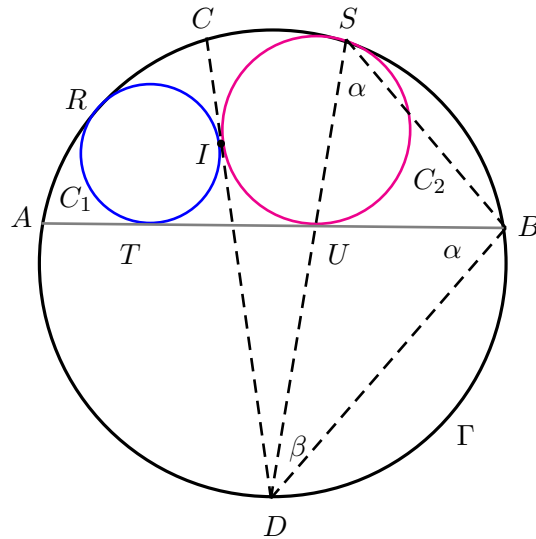
(a) Demuestra que los puntos  $R, T, D$  son colineales.

(b) Demuestra que  $I$  es el incentro del triángulo  $\triangle ABC$ .

*Demostración.* Sea  $D'$  el punto medio del arco  $\widehat{BA}$ , y observemos que el punto  $D$  está sobre el eje radical de  $C_1$  y  $C_2$ . Entonces bastará con demostrar que  $D'$  tiene la misma potencia con respecto a  $C_1$  y  $C_2$  y así de esta manera coincidirá con  $D$ . Por el resultado del problema 3.3.3 tenemos que  $R, T$  y  $D'$  son colineales, asimismo,  $S, U$  y  $D'$  son colineales. Observemos que  $\angle RTA = \frac{\widehat{AR} + \widehat{BD'}}{2} = \frac{\widehat{AR} + \widehat{DA}}{2} = \angle RSD'$ , se sigue entonces que el cuadrilátero  $RTUS$  es cíclico. Por potencia del punto  $D'$  con respecto a la circunferencia circunscrita a  $RTUS$  obtenemos que  $D'T \cdot D'R = D'U \cdot D'S$ . Esto a su vez implica que  $D'$  tiene la misma potencia con respecto a  $C_1$  y  $C_2$ , por lo que concluimos que  $D' = D$ .



Ahora, para el inciso (b) recordemos que para que  $I$  sea el incentro del triángulo  $\triangle ABC$  es suficiente que se cumpla que  $DI = DB = DA$ . Notemos que  $\angle BSD = \angle ABD = \alpha$ , ya que intersectan arcos de la misma longitud. Tenemos entonces que los triángulos  $\triangle DSB$  y  $\triangle DBU$  son semejantes. De aquí se obtiene que  $DU \cdot DS = DB^2$ , que es precisamente la potencia de  $D$  con respecto a  $C_2$ . Recordemos además que la potencia de  $D$  con respecto a  $C_2$  es también  $DI^2$ , por lo tanto,  $DB = DI$ .  $\square$

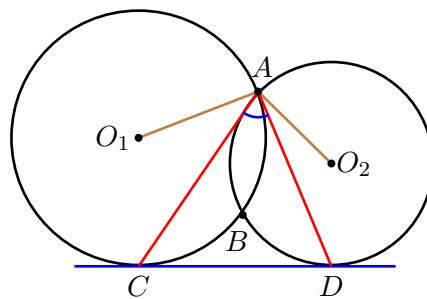


### 3.3.1. Problemas

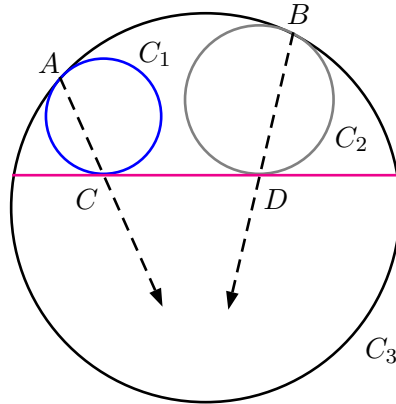
**Problema 3.28** *Dos circunferencias son tangentes exteriormente en un punto A. BC es una tangente común externa. Demuestra que  $\angle BAC = 90^\circ$ .*

**Problema 3.29** *Dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$  se intersectan en los puntos A y B, como se muestra en la figura. La línea CD es tangente a ambas circunferencias. Demuestra que*

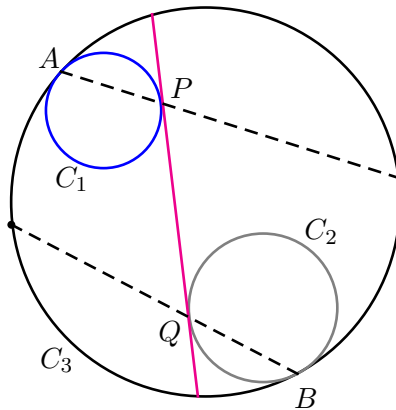
$$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle O_1 A O_2.$$



**Problema 3.30** Las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  son tangentes interiormente a  $C_3$  en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Se traza una tangente exterior común a  $C_1$  y  $C_2$  la cual toca a las circunferencias en los puntos  $C$  y  $D$ , respectivamente. Demuestra que las rectas  $AC$  y  $BD$  se intersectan en un punto sobre la circunferencia  $C_3$ .



**Problema 3.31** Las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  son tangentes interiormente a la circunferencia  $C_3$  en los puntos  $A$  y  $B$ , como se ve en la figura. La tangente interior común a  $C_1$  y  $C_2$  toca a estas circunferencias en  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Demuestra que las rectas  $AP$  y  $BQ$  intersectan a la circunferencia  $C_3$  en puntos diametralmente opuestos.



**Problema 3.32** *Dos circunferencias  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  están dentro de la circunferencia  $\Gamma$ , y son tangentes a  $\Gamma$  en puntos distintos  $M$  y  $N$ , respectivamente. La circunferencia  $\Gamma_1$  pasa por el centro de la circunferencia  $\Gamma_2$ . La recta que pasa por los dos puntos de intersección de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  corta a  $\Gamma$  en los puntos  $A$  y  $B$ . Las rectas  $MA$  y  $MB$  cortan a  $\Gamma_1$  en los puntos  $C$  y  $D$ , respectivamente. Demuestra que  $CD$  es tangente a  $\Gamma_2$ .*

**Problema 3.33** *Dos circunferencias  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se cortan en  $M$  y  $N$ . Sea  $l$  la tangente común a  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  tal que  $M$  está más cerca de  $l$  que  $N$ . La recta  $l$  es tangente a  $\Gamma_1$  en  $A$  y a  $\Gamma_2$  en  $B$ . La recta paralela a  $l$  que pasa por  $M$  corta de nuevo a  $\Gamma_1$  en  $C$  y a  $\Gamma_2$  en  $D$ . Las rectas  $CA$  y  $DB$  se intersectan en  $E$ ; las rectas  $AN$  y  $CD$  se intersectan en  $P$ ; las rectas  $BN$  y  $CD$  se intersectan en  $Q$ . Demuestra que  $EP = EQ$ .*

**Problema 3.34** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ , respectivamente, secantes en  $M$  y  $N$ . La recta  $t$  es la tangente común a  $S_1$  y  $S_2$  más cercana a  $M$ . Los puntos  $A$  y  $B$  son los respectivos puntos de contacto de  $t$  con  $S_1$  y  $S_2$ ;  $C$  el punto diametralmente opuesto a  $B$  y  $D$  el punto de intersección de la recta  $O_1O_2$  con la recta perpendicular a la recta  $AM$  que pasa por  $B$ . Demuestra que  $M$ ,  $D$  y  $C$  están alineados.*

### 3.4. Construir un ángulo

Al igual que se hizo con segmentos, en ocasiones conviene construir un ángulo el cual es mencionado en el problema. En el siguiente ejemplo queda clara esta idea:

**Ejemplo 3.4.1** *Se escoge un punto  $D$  en el interior de un triángulo escaleno  $\triangle ABC$  de tal manera que el ángulo  $\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$  y  $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ . Encuentra*

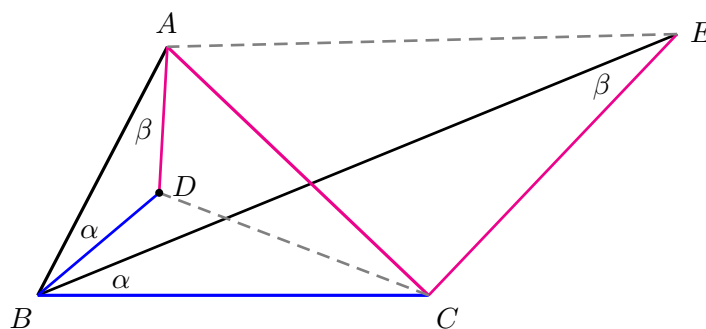
$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

*Demostración.* Se traza el segmento  $CE$  de la misma longitud que  $AC$  y de tal manera que  $CE$  es perpendicular a  $AC$  (aquí hemos formado el ángulo  $\angle ACB + 90^\circ$ ). Tenemos que  $\angle BCE = \angle BDA$ , además  $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{EC}$  lo cual implica que  $\triangle ABD \sim \triangle EBC$ . Por otro lado, como  $\angle ABE = \angle DBC$  y  $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}$  tenemos que

$$\triangle ABE \sim \triangle DBC \implies \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD}.$$

Esto a la vez implica que

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{2}AC}{CD} \implies \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}. \quad \square$$



### 3.4.1. Problemas

**Problema 3.35** Encuentra el valor del lado de un decágono regular en función del radio de la circunferencia circunscrita a éste.

**Problema 3.36** Sea  $AD$  la mediana del triángulo  $\triangle ABC$ . Sabemos que  $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$ . Halla el  $\angle BAC$  si se sabe que  $AB \neq AC$ .

**Problema 3.37** Sea  $M$  el punto medio del lado  $BC$  de un triángulo  $ABC$ . Se sabe que  $\angle BAM = \frac{1}{2}\angle MAC$ . Se extiende  $AM$  a través de  $M$  hasta un punto  $D$  de tal manera que  $\angle ABD = 90^\circ$ . Demuestra que

$$AC = \frac{1}{2}AD.$$

**Problema 3.38** En el triángulo  $\triangle ABC$ ,  $AB = AC$  y  $\angle BAC = 80^\circ$ . En el interior del triángulo se toma el punto  $M$  de tal manera que  $\angle MBC = 30^\circ$  y  $\angle MCB = 10^\circ$ . Halla el ángulo  $\angle AMC$ .

**Problema 3.39** En el triángulo  $\triangle ABC$  tenemos que el  $\angle BCA$  es obtuso y  $\angle BAC = 2\angle ABC$ . La línea a través de  $B$  y perpendicular a  $BC$  intersecta la línea  $AC$  en  $D$ . Sea  $M$  el punto medio de  $AB$ . Demuestra que  $\angle AMC = \angle BMD$ .

**Problema 3.40** Sean  $P$  y  $Q$  puntos en el interior de un triángulo  $\triangle ABC$  tales que  $\angle PAB = \angle QAC$  y  $\angle PBA = \angle QBC$ . Encuentra

$$\frac{PA \cdot QA}{AB \cdot AC} + \frac{PB \cdot QB}{AB \cdot BC} + \frac{PC \cdot QC}{BC \cdot AC}.$$

**Problema 3.41** Sea  $P$  un punto interior al triángulo  $\triangle ABC$  tal que  $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ . Sean  $D$  y  $E$  los incentros de los triángulos  $\triangle APB$  y  $\triangle APC$ , respectivamente. Demuestra que  $AP$ ,  $BD$  y  $CE$  son concurrentes.

**Problema 3.42** En un triángulo  $\triangle ABC$  sea  $AP$  la bisectriz de  $\angle BAC$  con  $P$  sobre  $BC$ , y sea  $BQ$  la bisectriz de  $\angle ABC$  con  $Q$  sobre  $CA$ . Se sabe que  $\angle BAC = 60^\circ$  y que  $AB + BP = AQ + QB$ . ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos del triángulo  $\triangle ABC$ ?





---

## Capítulo 4

### Problemas variados

---

Un ingrediente muy importante al resolver cualquier problema de Matemáticas (o de cualquier otra área) es *la creatividad*. Al resolver problemas agrupados de manera que en todos ellos se aplica una técnica común, se pierde un poco la oportunidad de poner en práctica nuestra creatividad. Por esta razón es muy importante resolver problemas que no estén agrupados de esta forma, o en los cuales no sea clara o evidente la estrategia que debemos aplicar.

El presente capítulo tiene dos objetivos: el primero es presentar dos pequeñas colecciones de problemas, una sobre polígonos equiangulares y la otra sobre cuadriláteros circunscritos. El segundo objetivo es presentar una colección de problemas no agrupados por la técnica requerida en su solución. De esta manera se tiene la oportunidad de poner una vez más en práctica, nuestro ingenio y creatividad.

## 4.1. Problemas

Dado un polígono convexo, diremos que éste es *equiangular* si todos sus ángulos interiores son congruentes.

**Problema 4.1** Sean  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  y  $a_6$  las longitudes de los lados de un hexágono equiangular (en ese orden). Demuestra que  $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$ .

**Problema 4.2** Un polígono equiangular con un número impar de lados está inscrito en un círculo (es decir, es cíclico). Demuestra que el polígono es regular.

**Problema 4.3** Sea  $P$  un punto variable en el interior o sobre los lados de un polígono equiangular. Demuestra que la suma de distancias desde  $P$  hacia los lados del polígono es constante.

**Problema 4.4** Sea  $ABCDE$  un pentágono equiangular cuyos lados tienen longitud racional. Demuestra que el pentágono es regular.

**Problema 4.5** Los lados de un octágono equiangular tienen longitudes racionales. Demuestra que el octágono tiene un centro de simetría.

**Problema 4.6** Está dado un hexágono convexo en el cual cualesquiera dos lados opuestos tienen la siguiente propiedad: la distancia entre sus puntos medios es  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  veces la suma de sus longitudes. Demuestra que el hexágono es equiangular.

**Problema 4.7** Demuestra que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un hexágono equiangular son concurrentes.

**Problema 4.8** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero circunscrito con diagonales de longitudes  $AC = u$  y  $BD = v$ . Sean  $a, b, c$  y  $d$  las longitudes de las tangentes desde los vértices  $A, B, C$  y  $D$ . Demuestra que el cuadrilátero  $ABCD$  es cíclico si y sólo si

$$\frac{u}{v} = \frac{a + c}{b + d}.$$

**Problema 4.9** Demuestra que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia de radio  $R$  y a su vez está circunscrito a una circunferencia de radio  $r$ , y  $d$  es la distancia entre los centros, entonces

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

**Problema 4.10** Sean  $ABCD$  un cuadrilátero circunscrito,  $P$  el punto de intersección de las rectas  $AB$  y  $CD$ ,  $Q$ , el punto de intersección de las rectas  $AD$  y  $BC$ . Demuestra que el ortocentro del triángulo formado por las rectas  $PQ$ ,  $AC$  y  $BD$  coincide con el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero  $ABCD$ .

**Problema 4.11** Sea  $N$  el punto de intersección de las diagonales  $AC$  y  $BD$  de un cuadrilátero circunscrito  $ABCD$ . Las longitudes de las perpendiculares desde  $N$  hacia los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  son  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , respectivamente. Demuestra que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

**Problema 4.12** Sea  $ABCD$  un cuadrilátero circunscrito. Los segmentos desde  $A$  hasta los puntos de tangencia son iguales a  $a$ , los segmentos desde  $C$  hasta los puntos de tangencia son iguales a  $c$ . ¿En qué razón la diagonal  $BD$  divide a la diagonal  $AC$ ?

**Problema 4.13** Sea  $\triangle ABC$  un triángulo y  $P$  un punto en su interior. Los pies de las perpendiculares desde  $P$  sobre  $AC$  y  $BC$  son  $P_1$  y  $P_2$ , respectivamente. Los pies de las perpendiculares desde  $C$  sobre  $AP$  y  $BP$  son  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente. Demuestra que  $P_1Q_2$  y  $P_2Q_1$  se intersectan sobre la línea  $AB$ .

**Problema 4.14** Sea  $P$  un punto en el interior de un triángulo equilátero  $\triangle ABC$ . Sabemos que  $PA = 3$ ,  $PB = 4$  y  $PC = 5$ . Encuentra el área del triángulo  $\triangle ABC$ .

**Problema 4.15** Sea  $ABCD$  un hexágono convexo con  $AB = BC = CD$  y  $DE = EF = FA$ , tal que  $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$ . Sean  $G$  y  $H$  puntos en el interior del hexágono tales que  $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$ . Demuestra que  $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$ .

**Problema 4.16** Dado un triángulo acutángulo  $\triangle ABC$ , localiza el punto  $P$  en el interior del triángulo para el cual la suma  $PA + PB + PC$  es mínima. (Este punto es conocido como punto de Torricelli)

**Problema 4.17** Un cuadrilátero convexo queda dividido por sus diagonales en cuatro triángulos. Si sabemos que los inradios de estos triángulos son iguales, demuestra que el cuadrilátero es un rombo.

**Problema 4.18** Las diagonales de un cuadrilátero convexo dividen a éste en cuatro triángulos de igual perímetro. Demuestra que el cuadrilátero dado es un rombo.

**Problema 4.19** En un cuadrilátero convexo  $ABCD$  la diagonal  $BD$  no bisecta ninguno de los ángulos  $\angle ABC$  ni  $\angle CDA$ . Un punto  $P$  está dentro de  $ABCD$  y satisface que

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ y } \angle PDC = \angle BDA.$$

Demuestra que  $ABCD$  es cíclico si y sólo si  $AP = CP$ .

**Problema 4.20** Las longitudes de los lados de un cuadrilátero son enteros positivos. La longitud de cada lado divide a la suma de las tres restantes. Demuestra que dos de los lados del cuadrilátero tienen la misma longitud.

**Problema 4.21** Sea  $ABCDEF$  un hexágono convexo tal que

$$\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ \text{ y } \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Demuestra que

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1.$$

**Problema 4.22** Sea  $ABCDEF$  un hexágono inscrito en un círculo de tal manera que  $AB = CD = EF$ . Sean  $P, Q, R$  los puntos de intersección de  $AC$  y  $BD$ ,  $CE$  y  $DF$ ,  $EA$  y  $FB$ , respectivamente. Demuestra que los triángulos  $\triangle PQR$  y  $\triangle BDF$  son semejantes.

**Problema 4.23** Sean  $A, B, C$  y  $D$  cuatro puntos distintos tales que cada círculo a través de  $A$  y  $B$  intersecta o coincide con cada círculo a través de  $C$  y  $D$ . Demuestra que los cuatro puntos son colineales o concíclicos.

**Problema 4.24** Sea  $\mathcal{P}$  un conjunto infinito de puntos en el plano de tal manera que la distancia entre cualquier par de puntos de  $\mathcal{P}$  es un número entero. Demuestra que todos los puntos de  $\mathcal{P}$  son colineales.

**Problema 4.25** Sean  $R, r, r_A, O, I$  e  $I_A$ , el circunradio, el inradio, el exradio con respecto al vértice  $A$ , el circuncentro, el incentro y el excentro, respectivamente. Demuestra lo siguiente:

$$(a) \quad OI^2 = R^2 - 2Rr, \text{ (Teorema de Euler)}$$

$$(b) \quad OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A,$$

$$(c) \quad II_A^2 = 4R(r_A - r).$$

**Problema 4.26** Las diagonales  $AC$  y  $CE$  de un hexágono regular  $ABCDEF$  están divididas por los puntos interiores  $M$  y  $N$ , respectivamente, de tal manera que

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

Determina  $r$  si sabemos que los puntos  $B, M$  y  $N$  son colineales.

**Problema 4.27** Dado un triángulo  $\triangle ABC$  sean  $P, Q$  y  $R$  los puntos donde los respectivos excírculos tocan a los segmentos  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente. Demuestra que

$$|PQR| \leq \frac{|ABC|}{4}.$$



---

## Capítulo 5

# Sugerencias para los problemas propuestos

---

En este capítulo el lector encontrará sugerencias que pueden ser útiles en la demostración y/o solución de algunos de los problemas. Siéntase libre de enviar sus críticas, comentarios, sugerencias, regañones, etc... En fin, todo aquello que pueda ayudar a mejorar la comprensión del libro por usted, querido lector, será bienvenido y considerado con mucho agradecimiento de mi parte. Mis correos electrónicos son los siguientes: [jeronimo@cimat.mx](mailto:jeronimo@cimat.mx) y [jesusjero@hotmail.com](mailto:jesusjero@hotmail.com)

**Problema 1.2** Prolongue  $BP$  hasta intersectar al segmento  $AC$  y considere los triángulos que se forman.

**Problema 1.4** Considere primero el caso de un cuadrilátero. Divídalo en triángulos trazando las diagonales desde uno de los vértices. Aplique lo mismo para el caso general.

**Problema 1.5** Sea  $M$  el punto medio del segmento  $CD$ . Observe que el triángulo  $\triangle AMD$  es equilátero.

**Problema 1.6** Si una de las líneas corta a la circunferencia en los puntos  $A, B$  y la otra en los puntos  $C, D$ , trace una de las diagonales del cuadrilátero  $ABCD$  y use la igualdad de ángulos alternos internos.

**Problema 1.7** Utilice el resultado del problema anterior.

**Problema 1.8** Sean  $A, B, C, D$  los puntos de división de la circunferencia considerados en el orden de las manecillas del reloj y sean  $M, N, P, Q$  los puntos medios de los arcos  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ , respectivamente. Demuestre que  $MP$  es perpendicular a  $NQ$ .

**Problema 1.10** Trace la tangente común de las circunferencias y considere el punto donde ésta intersecta al segmento  $BC$ .

**Problema 1.13** Trace un diámetro el cual pase por uno de los vértices del lado en cuestión.

**Problema 1.14** Observe que la medida del ángulo  $\angle ACB$  no depende de la elección del punto  $C$ . Después pruebe que la medida del arco  $\widehat{ED}$  es constante.

**Problema 1.15** Observe que los triángulos  $\triangle AO_1C$  y  $\triangle AO_2D$  son isósceles y que  $O_1C$  y  $O_2C$  son perpendiculares a  $CD$ .

**Problema 1.16** Complete el paralelogramo  $ABCD$  con los vértices considerados en ese orden, y prolongue los segmentos  $b, c$  y  $d$ , hasta que intersecten al lado  $AD$  del paralelogramo.

**Problema 1.20** Observe que el cuadrilátero formado por los puntos medios de las diagonales y de los dos puntos medios de los lados es un paralelogramo.

**Problema 1.23** Prolongue el segmento  $AD$ , más allá del punto  $D$ , hasta un punto  $X$  de manera que se cumpla que  $AX = 2 \cdot AD$ . Después, demuestre que los triángulos  $\triangle ACX$  y  $\triangle APM$  son congruentes.

**Problema 1.24** Considere los segmentos que unen los puntos medios de las bases del trapecio con el punto de intersección de las diagonales. Después, use semejanza para ver que estos segmentos forman ángulos iguales con respecto a alguna de las diagonales.



---

**Problema 1.27** Observe las igualdades de ángulos entre los ángulos semiinscritos y los ángulos inscritos que se forman.

**Problema 1.29** Prolongue los segmentos  $AD$  y  $BC$  hasta que se intersecten para formar un triángulo rectángulo.

**Problema 1.31** Considere dos lados adyacentes del paralelogramo y los centros de los cuadrados contruidos sobre ellos. Con estos dos centros y el vértice en común de estos dos lados, se obtienen los vértices de un triángulo. Considere los otros tres triángulos formados así de esta manera. Pruebe que esos triángulos son congruentes.

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

Problema 1.2

**Problema 1.2**

**Problema 1.2**



---

## Bibliografía

---

- [1] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega. (2002). *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM.
- [2] R. Bulajich, J. A. Gómez Ortega (2002). *Geometría, ejercicios y problemas*, Instituto de Matemáticas de la UNAM
- [3] H.S.M.Coxeter (1988). *Introducción a la geometría*, LIMUSA.
- [4] H.S.M. Coxeter, Samuel L. Greitzer (1994). *Retorno a la geometría*, Euler Col. La tortuga de Aquiles.
- [5] H. Eves (1985). *Estudio de las geometrías*, UTEHA.
- [6] V. Gúsiev, V. Litvinenko, A. Mordkóvich (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos*, *Geometría*, MIR-Moscú.
- [7] R. Honsberger (1995). *Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry*, The Mathematical Association of America.
- [8] A. Illanes Mejía (2001). *Principios de Olimpiada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM.
- [9] I. Martin Isaacs (2002). *Geometría universitaria*, Thomson Learning.
- [10] Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind (1988). *Challenging problems in geometry*, Dover.

- [11] I. Shariguin (1989). *Problemas de geometría, Planimetría*, Colección Ciencia Popular, MIR-Moscú.
- [12] Levi S. Shively (1984). *Introducción a la geometría moderna*, CECSA.

---

# Índice

---

## Ángulos

- alternos externos, 2
- alternos internos, 2
- centrales, 5
- correspondientes, 2
- inscritos, 6
- opuestos por el vértice, 1
- semi-inscritos, 6
- suplementarios, 2

## Altura, 44

## Baricentro, 70

## Bisectriz, 34, 47, 74

## Catetos, 50

## Centro

- radical, 43

## Centroide, 70–72

## Circuncírculo, 47

## Circuncentro, 64

## Circunferencia

- circunscrita, 22, 31, 44, 56
- inscrita, 55, 74

## Circunradio, 64

## Cuadrilátero

- cíclico, 27, 46, 63
- inscrito, 47

## Diámetro, 48

## Eje

- radical, 41, 42, 44, 126

## Fórmula

- de Brahmagupta, 58
- de Herón, 58

## Gravicentro, 70

## Hipotenusa, 49, 53

## Incentro, 55, 74, 77

## Inradio, 64, 67

## Línea

- de los centros, 46
- secante, 39, 45
- tangente, 45

## Líneas

- concurrentes, 48

## Ley

- de Cosenos, 51
- de Senos, 11, 56
- del paralelogramo, 50

## Lugar geométrico, 52, 55

## Media

- geométrica, 49, 66
- Mediana, 69
- Ortocentro, 44, 48
- Paralelogramo, 14
- Pentágono, 63
- Polígono
  - convexo, 5
- Potencia
  - de un punto, 38
- Proyección, 21, 48
- Radián, 5
- Reflexión, 36
- Teorema
  - de Carnot, 52
  - de Casey, 67
  - de Euler, 48, 137
  - de la bisectriz, 115, 121
  - de Leibniz, 74
  - de Miquel, 34
  - de Pitágoras, 49, 50
  - de Ptolomeo, 63
  - de Stewart, 53
  - de Tales, 13, 17, 69
  - generalizado de Pitágoras, 62
- Trapezio, 25, 63
- Triángulos
  - congruentes, 20
  - rectángulos, 49
  - semejantes, 16, 17, 49
- Triangulación, 67
- Triangulos
  - equiláteros, 20, 27