32 Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Tamaulipas 2018
ETAPA MUNICIPAL
SOLUCIONES

Respuestas:
PARTE A:

1. 14	5. 72
2. 108	6. $\frac{11}{108}$
3. 51°	7. 254
4. 1926	8. 7

PARTE A:

1. Carlos regresa a las 14 horas pues transcurren 10 horas desde que sale (4+4=8 horas viajando, y 2 horas de estancia en Geometrilandia).

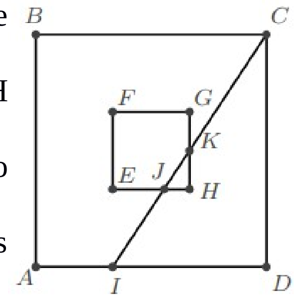
2. La estrategia más simple consiste en elegir para cada moneda el botón que maximice la cantidad de chicles. Empezando por 0 se obtiene la sucesión de valores 16, 32, 48, 72, 108, tras pulsar las dos primeras veces el primer botón, las dos últimas el segundo botón, y en el tercer paso cualquiera de los dos botones, ya que ambos aumentan de 32 a 48.

3. Al fijarnos en el triángulo DBF, como tenemos valores para los ángulos en B y en F podemos calcular que el ángulo en D es igual a 180° - 58° - 93° = 29°. Ahora, en el triángulo DGA podemos hacer lo mismo y entonces el ángulo A será igual a 180° - 100° - 29° = 51°.

4. El número de las unidades solo puede ser 1, 2 o 3 para que el de las centenas sea 2, 6 o 9 respectivamente. Solo nos falta encontrar el número de las decenas en cada caso para que la suma de los dígitos del número sea 12. Los números enlistados son 381, 642 y 903. La suma de estos números es 1926.

5. Hay 4x4 formas de armar un equipo de portero y delantero. Ya elegido este equipo, de entre los 3 porteros y 3 delanteros restantes se pueden armar 3x3 equipos distintos. Es decir, cada pareja posible deberá jugar 9 partidos. Al ser 16 parejas podremos contar 16x9=144 partidos, pero cada partido lo estamos contando doble, pues el partido entre el Portero 1 y el Delantero 1 contra el Portero 2 y el Delantero 2 también lo estamos contando al considerar como el equipo inicial el formado por el Portero 2 y el Delantero 2. Así que el total de partidos es 72.

6. Notemos que FGHE tiene área de $\frac{1}{9}$, pues cada uno de sus lados mide $\frac{1}{3}$, además, KH es la mitad del lado GH, por lo que medirá $\frac{1}{6}$ y JH mide un tercio del lado EH, es decir $\frac{1}{9}$. Así que el área del triángulo KHJ es $(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{6})\cdot(\frac{1}{9})=\frac{1}{108}$ y por lo tanto el área sombreada es $\frac{1}{9}-\frac{1}{108}=\frac{11}{108}$.



7. Cuando el dígito de las unidades es *a*, solo hay que checar cuántos números de 2 dígitos son divisibles por *a*. El dígito de las unidades no puede ser 0, pues el 0 no divide a ningún número. Si el dígito de las unidades es 1, hay 90 números de 2 dígitos divisibles por 1. Si es 2, hay 45 múltiplos de 2 (la mitad de los 90 números de 2 dígitos). Si es 3, hay 30. Si es 4, hay 22. Si es 5, hay 18. Si es 6 hay 15. Si es 7 hay 13. Si es 8 hay 11. Si es 9 hay 10. En total hay 254 números que cumplen la condición.

8. La frase "Primo" debe tenerla la tarjeta del 12, pues es el único que no es número primo de los cuatro. Posteriormente la palabra "Impar" debe tenerla el 2, pues tanto 5 como 7 son impares. Finalmente, de los 2 restantes, el 7 no puede tener la frase "Múltiplo de 7", pues sí lo es, así que el 7 es el que debe llevar la frase "Mayor a 100".

PARTE B:

9. Como *bcda* es un número de cuatro cifras, entonces $a = 1$ o $a = 2$.
   - Caso 1. Si $a = 1$, $1bcd + 7911 = bcd1$ de donde $d = 0$ pues $d + 1$ termina en 1, $c = 9$ pues $c + 1$ termina en $d = 0$. Así, $1b90 + 7911 = b901$ y $b = 9$ pues $9 + 1 + b$ termina en 9 y $7+1+1= b$. Por lo tanto, $abcd = 1990$.
   - Caso 2. Si $a = 2$, $2bcd + 7911 = bcd2$ de donde $d = 1$ pues $d + 1$ termina en 2, $c = 0$ pues $c + 1$ termina en $d = 1$ y entonces $2b01 + 7911 = b012$ y no existe *b* que cumpla la condición.

   Por lo tanto, 1990 es la única solución.

10. Hay que fijarse en los triángulos EAC y BAD. Estos triángulos son iguales puesto que el ángulo EAC es igual al ángulo BAD porque son iguales al ángulo BAC más un ángulo de 60°. Además tienen el lado EA = AB y el AC=AD porque los triángulos EAB y CAD son equiláteros, así que BD=EC. Pero además, notemos que los triángulos AFG y AEC están a escala (son semejantes por paralelas), y como AF es a la mitad de AE, entonces FG también será la mitad de EC y por lo tanto EC mide 2.

11. Como $77=7\cdot 11=1\cdot 7\cdot 11$ quiere decir que las únicas posibilidades para los números de E y F son 1 y 7 en algún orden. Luego, para que los otros cuatro dígitos sumen 11, tenemos dos opciones, que los números elegidos por A, B, C y D sean, en algún orden {0,2,4,5} o bien {0,2,3,6}. En cada una de estas opciones tenemos $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ posibilidades diferentes para que eligan A, B, C y D sus números, así que el total de maneras distintas de elegir los dígitos son 2(24+24)=96.