

25a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Concurso Nacional. Segundo día.

15 de noviembre de 2011

Problema 1. Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre cada uno de los números del 1 al 9.

Nota: Un ejemplo de un número que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos es el 2202022002.

Problema 2. Una cuadrícula con lados de longitudes $(2^n - 1)$ y $(2^n + 1)$ se quiere dividir en rectángulos ajenos con lados sobre líneas de la cuadrícula y con un número de cuadraditos de 1×1 dentro del rectángulo igual a una potencia de 2. Encuentra la menor cantidad de rectángulos en los que se puede dividir la cuadrícula.

Nota: El 1 es considerado una potencia de 2, pues $2^0 = 1$.

Problema 3. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias de radios diferentes que se cortan en los puntos A y B . Consideremos un punto C sobre la recta AB de modo que B quede entre A y C . Sean P y Q puntos sobre C_1 y C_2 , respectivamente, tales que CP es tangente a C_1 , CQ es tangente a C_2 , P no está dentro de C_2 y Q no está dentro de C_1 . La recta PQ corta de nuevo a C_1 en R y a C_2 en S , ambos puntos distintos de B . Supongamos que CR corta de nuevo a C_1 en X y CS corta de nuevo a C_2 en Y . Sea Z un punto sobre la recta XY . Muestra que SZ es paralela a QX si y sólo si PZ es paralela a RX .