25a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Concurso Nacional. Primer día.

14 de noviembre de 2011

Problema 1. Se tienen 25 focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros 24 se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un 24-ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia. Únicamente se permite aplicar cualqueira de las siguientes dos operaciones:

- Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una candidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices y el del foco del centro de la circunferencia.
- Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices y del foco del centro de la circunferencia.

Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible aplicar un número finito de operaciones para llegar a la configuración en la que todos los focos están encendidos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con sus vértices sobre la circunferencia $\mathcal{C}$. Sea ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto A. La circunferencia con centro B y radio BA intersecta a la recta ℓ en D y a la recta AC en E. Muestra que la recta DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 3. Sea $n \geq 3$. Encuentra todas las soluciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1 \end{aligned}$$