# Problemas

Conteo Elemental y Factorización en Primos

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

## 1. Problemas

**Problema 1.** Consideremos la sucesión de cuadrados 1, 4, 9, 16, 25, ... El número $10^8$ es un término de esta sucesión, ¿cuál es el término siguiente de la sucesión?

**Problema 2.** Encuentre el menor número natural $n$ tal que $n!$ es divisible entre 9000.

**Problema 3.** Para algún número $n$, ¿puede $n!$ tener exactamente cinco ceros al final de su representación decimal?

**Problema 4.** Pruebe que si un número tiene un número impar de divisores, entonces debe ser un cuadrado perfecto.

**Problema 5.** ¿Es posible que alguna potencia de 2 termine en 1982?

**Problema 6.** La colección infinita de números $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, \ldots$ se ha formado de la manera siguiente: se coloca el primer impar, luego se colocan los siguientes dos pares, después los tres impares siguientes al último par colocado, luego los cuatro pares siguientes al último impar puesto y así sucesivamente. ¿Cuál es el número par más cercano a 2013 que aparece en la colección?

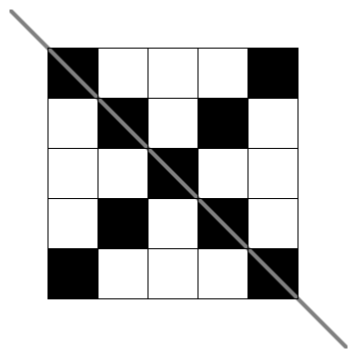
**Problema 7.** Encuentra la suma de todos los números primos entre 2 y 100 que son a la vez 1 más que un múltiplo de 5 y 1 menos que un múltiplo de 6.

**Problema 8.** En un círculo están marcado en forma consecutiva (en el orden de las manecillas del reloj) los números del 1 al 2004. En cada número múltiplo de 6 hay una ficha marcada con el mismo número de su casilla. Cada segundo cada ficha se mueve en el sentido de las manecillas del reloj el mismo número de espacios de la ficha (por ejemplo, después de 4 segundos, la ficha 30 está en la casilla 150). ¿Cuántos segundos deben transcurrir para que todas las fichas estén por primera vez juntas en una misma casilla?

**Problema 9.** Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 12321 es capicúa. ¿Cuántos números de 4 dígitos son capicúas?

**Problema 10.** Todos los números de 3 cifras están divididos en clases. Una clase está integrada por todos los números que tienen exactamente los mismos dígitos aunque en distinto orden. Por ejemplo 112 y 121 están en la misma clase, pero 122 no. ¿Cuántas clases distintas tenemos?

**Problema 11.** Cada uno de los cuadros en blanco de la siguiente figura se quieren colorear de azul, rojo o verde, ¿De cuántas formas se puede colorear la figura de tal forma que sea simétrica con respecto al eje marcado?



**Problema 12.** ¿De cuántas maneras podemos elegir un portero, un capitán y un capitán suplente en un equipo de fútbol de once personas? Tengamos en cuenta que el portero puede ser capitán o capitán suplentes, pero el capitán y el capitán suplente deben ser personas distintas.

**Problema 13.** Cuatro amigos se reunen a jugar Guitar Hero. Tocarán 8 canciones y en cada canción habrá un vocalista, un bajista, un baterista y un guitarrista. Para no aburrirse deciden que se irán cambiando los instrumentos de manera que ninguno toque el mismo instrumento en dos canciones consecutivas. ¿De cuántas formas pueden hacer esto?

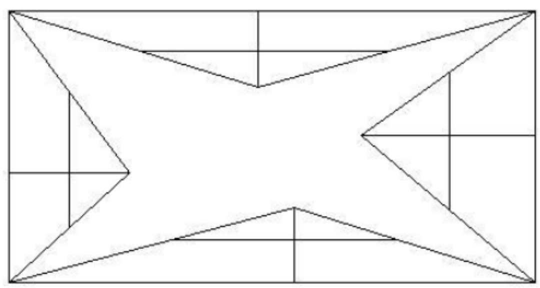
**Problema 14.** Se quieren llenar las casillas restantes de tal modo que cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 aparezca en cada fila y columna del tablero que se muestra. ¿De cuántas maneras podemos lograr esto?

**Problema 15.** Si se escriben todos los números desde 1 hasta el $10^{2013}$, ¿cuántas veces se escribe el dígito 8?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | | | | | 5 |
| 3 | | | | | 4 |
| 4 | | | | | 3 |
| 5 | | | | | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**Problema 16.** ¿De cuántas maneras se pueden escribir los números del 1 al 16 en las casillas de una cuadrícula de $4 \times 4$ de manera que no haya dos números de la misma paridad escritos en casillas que comparten un lado?

**Problema 17.** ¿De cuántas formas se puede colorear la siguiente figura con 4 colores de tal forma que no haya dos regiones que compartan alguno de sus lados pintadas del mismo color?



## 2. Soluciones

**Solución 1.** Notemos primero que $10^8 = (10^4)^2$, así que el siguiente número en la sucesión sería $10001^2$.

**Solución 2.** Tenemos que $9000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3$. Así que $n!$ debe contener al menos esa cantidad de factores primos. Como $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$, tendremos 3 factores 2 en el 4!, tendremos 2 factores 3 en el 6! y tendremos 3 factores 5 en el 15!, así que el menor natural que cumple lo pedido es 15.

**Solución 3.** No es posible. Para tener ceros al final de la representación decimal del número $n$ factorial, tenemos que tener factores 10 en su representación factorizada, es decir, factores 2 y factores 5. Como por cada par menor a $n$ tenemos al menos un factor 2 en $n!$, lo único que nos interesa entonces es estudiar los factores 5. En 5!, solo hay un factor 5, y así 5! tiene un 1 al final de su representación decimal, y por lo tanto todos los factoriales siguientes terminarán en al menos un cero. El siguiente factorial que tiene otro factor 5 es el $10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$, que al tener dos factores 5 (el del 5 y el del 10) terminará en 2 ceros, al igual que todos los siguientes factoriales hasta que nos encontremos otro factor 5. Siguiendo este pensamiento nos damos cuenta que así, a partir del 15! terminarán en 3 ceros hasta el 20! en el que empezarán a terminar en 4 ceros, pues aquí ya habría 4 factores 5, y por consiguiente 4 factores 10. Sin embargo, la siguiente ocasión en la que nos encontraremos un factor 5 más es en 25!, pero como $25 = 5^2$, tendremos 2 factores 5 extra, por lo que a partir de 25! factorial tendremos al menos 6 factores 10, lo que implica que terminarán en al menos 6 ceros, y de ninguna manera hay un factrial cuya representación decimal termine en 5 ceros.

**Solución 4.** Recordemos la fórmula que tenemos para obtener el número de divisores de un número dada su factorización en números primos, que resulta ser el producto de los exponentes de los números primos, aumentados en uno. Si uno de dichos exponentes fuera impar, aumentado en uno tendríamos un número par, y como el producto de cualquier múltiplo de 2 por otro número nos da un múltiplo de 2, lo que significaría que el número tiene una cantidad par de divisores, lo cuál no es posible, así que necesitamos que todos los exponentes sean pares, es decir, que el número es un cuadrado perfecto.

**Solución 5.** Si una potencia de 2, digamos $2^n$, termina en 2, entonces $2^{n-1}$ debe terminar en 1 o en 6. La única potencia de 2 que termina en 1, es decir que es impar, es $2^0$, y así, como $2^1 = 2$ no termina en 1982, de esta forma no se puede. La única posibilidad es que $2^{n-1}$ termine en 6. Analicemos ahora qué pasa con las decenas. Si el dígito de las decenas de $2^{n-1}$ es un dígito $a$, entonces el dígito de las decenas de $2^n$ debe ser $2a+1$, pues "traemos" una unidad de $6 \times 2 = 12$ de duplicar las unidades. Pero $2a+1$ es un impar, y 8 es par, entonces no se puede que una potencia de 2 termine en 1982.

**Solución 6.** Si arreglamos los números en forma triangular:

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
2 & 4 \\
5 & 7 & 9 \\
10 & 12 & 14 & 16 \\
17 & 19 & 21 & 23 & 25 \\
\vdots \\
1850 & \dots & \dots & \dots & 1936 = 44^2 \\
1937 & \dots & \dots & \dots & \dots & 2025 = 45^2 \\
2026
\end{array}$$

Entonces, el par más cercano es el 2026.

**Solución 7.** Los múltiplos de 5 pueden terminar en 0 o en 5. Así que un número que es uno mayor que un múltiplo de 5 puede terminar en 1 o 6. Si fuera en 6, no podría ser uno menos que un múltiplo de 6, porque un múltiplo de 6 es par y uno menos sería impar. Así, hay que examinar solamente 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91. De éstos solamente el 11, 41 y 71 son menores en uno a un múltiplo de 6, además todos son primos, por lo tanto, la suma es 123.

**Solución 8.** La ficha 2004 siempre va en la casilla 2004, así que el único lugar en donde pueden encontrarse todas las fichas es en la 2004. Como $2004 = 6 \times 334$, la ficha 6 llega por primera vez a la casilla 2004 después de 333 segundos. Por otro lado, si $a$ es un múltiplo de 6, entonces $a + 333a = 334a$ es múltiplo de 2004. Así que la respuesta es en 333 segundos.

**Solución 9.** Para el primer dígito de izquierda a derecha no podemos elegir el 0, pero sí cualquiera de las otras 9 opciones. Para la segunda de izquierda a derecha ya podemos incluir el 0, así que en esta elección tenemos 10 posibilidades, por el criterio multiplicativo tenemos $9 \times 10 = 90$ números capicúas de 4 dígitos.

**Solución 10.** Dividamos por tipos de clases. El primer tipo serán las clases de números con solo un dígito, el segundo las clases que tienen dos dígitos distintos, uno de uno y dos del otro y finalmente, la tercera clase será la de los números con tres dígitos distintos. Veamos ahora cuántas clases hay de cada tipo. Del primer tipo tenemos 9 clases: 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 y 999. Del segundo tipo, tenemos 10 formas de elegir el dígito que aparecerá dos veces en el número y por la forma que dividimos, 9 formas de elegir el que aparecerá una sola vez, así, los de este tipo serán $10 \times 9 = 90$ clases distintas. Finalmente de la tercera clase, para el primer dígito tenemos 10 posibilidades, para el segundo 9 y para el tercero 8. Pero veamos que de esta forma estamos contando las clases varias veces, por ejemplo la de 123 y 321, que son la misma clase, así que hay que eliminar repeticiones. Toda clase de la forma $abc$ la contamos así, pero también como $acb$, $bac$, $bca$, $cab$ y $cba$, es decir, 6 veces, así que las clases distintas de este tipo son $\frac{10\times9\times8}{6} = 120$. Entonces, la solución es $9 + 90 + 120 = 219$.

**Solución 11.** Es fácil ver que si coloreamos una de las mitades determinadas por el eje de simetría, la otra mitad queda automáticamente definida, pues debe ser igual a la ya coloreada. Cada cuadrito de la cuadrícula puede ser pintado de 3 maneras distintas y hay 8 cuadrados sobre los que tenemos la libertad de pintar, así que las formas dinstintas de hacerlo y que se mantenga la simetría pedida son $3^8$.

**Solución 12.** Como en otros ejemplos que se han realizado, aquí es más conveniente, en lugar de asignarles funciones a los jugadores, asignarle un jugador a cada función. En principio el portero puede ser cualquiera de los 11. Ahora, el capitán podría ser de nuevo cualquiera de los 11, inclusive quien fue elegido portero. Sin embargo, el subcapitán no podría ser el que ya fue elegido capitán, es decir, solo hay 10 posibilidades. Así que hay $11 \times 11 \times 10$ formas de hacer la elección de dichos cargos.

**Solución 13.** Primero debemos ver de cuántas formas pueden hacer la transición de una canción a la siguiente cumpliendo la condición deseada. Al terminar una canción el primer músico (no importa quien sea) tiene tres opciones para su siguiente instrumento, es decir, cualquiera menos el que acaba de tocar. Después de que este elige el instrumento, el que había tocado el instrumento elegido por el anterior, tendrá también 3 opciones, y cuando este realiza su elección el resto de la transición ya queda determinada: si decide intercambiar instrumentos con el primero entonces los otros dos también deben hacer el intercambio entre ellos, y si decide tomar el instrumento de uno de los dos restantes, quien haya tocado dicho instrumento debe elegir el del cuarto integrante, pues en caso contrario, el cuarto se quedaría con el mismo instrumento dos canciones seguidas. Por lo tanto tenemos $3 \times 3 = 9$ formas de realizar una transición entre canción y canción. Ahora bien, para la primera canción, el primer jugador puede elegir cualquiera de los 4 instrumentos, el siguiente cualquiera de los 3 restantes, el tercero tiene 2 posibilidades y el último tiene que tomar el instrumento restante, por lo tanto la elección de instrumentos para la primera canción se puede hacer de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas distintas. Una vez decidida la primera canción, cada transición de canción se puede hacer de 9 maneras distintas, y son 7 transiciones. Por lo tanto, el total de formas en las que pueden hacer el concierto es de $24 \times 9^7$.

**Solución 14.** Una estrategia natural en la solución de un problema como éste es llenar primero cualquier casilla para la cual no existe otra alternativa, o si no se presenta este caso, llenar primero aquellas casillas para las cuales hay muy pocas alternativas. En este problema no hay ninguna casilla que tenga una sola posibilidad, pero hay varias que tienen sólo dos posibilidades, y comenzaremos con una de éstas. Primero, llenaremos la casilla en la segunda fila y tercera columna. Dado que hay un 2 y un 5 en esta fila, y un 3 y un 4 en esta columna, las únicas alternativas disponibles son 1 y 6. Si escogemos el 1, otras tres casillas quedan determinadas. Si escogemos el 6, las mismas tres casillas quedan determinadas. Por lo tanto, hasta aquí las alternativas son:
Ahora, si llenamos las cuatro casillas centrales, encontramos que nuevamente hay dos posibilidades, no importa si hayamos escogido el 1 o el 6 al principio. Por ejemplo, procediendo a partir de la primera elección que mostramos arriba, obtenemos:
o sea, tenemos otras dos alternativas para cada una de nuestras dos elecciones iniciales. Las casillas restantes pueden llenarse en dos grupos de cuatro de la misma

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | | 1 | 6 | | 5 |
| 3 | | | | | 4 |
| 4 | | | | | 3 |
| 5 | | 6 | 1 | | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | | 6 | 1 | | 5 |
| 3 | | | | | 4 |
| 4 | | | | | 3 |
| 5 | | 1 | 6 | | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | | 1 | 6 | | 5 |
| 3 | | 2 | 5 | | 4 |
| 4 | | 5 | 2 | | 3 |
| 5 | | 6 | 1 | | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | | 1 | 6 | | 5 |
| 3 | | 5 | 2 | | 4 |
| 4 | | 2 | 5 | | 3 |
| 5 | | 6 | 1 | | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

manera, donde cada nuevo grupo nos proporciona dos alternativas nuevas, no importa cuáles hayan sido las elecciones ya hechas. Por consiguiente, hay $2^4 = 16$ maneras de completar el cuadrado.

**Solución 15.** Supongamos que tenemos escritos todos los números, desde el 1 hasta el número formado por 2013 nueves, los números con menos de 2013 cifras los podemos ver con tantos ceros a la izquierda como sean necesarios para completar las 2013 cifras. Nos fijamos en una posición arbitraria de todos estos números, por ejemplo, el de la unidades (pero podría ser el de las decenas o la posición 13 o 2002, etc). Al considerar esta posición en todos los números escritos podemos ver que una décima parte de los dígitos deben ser 8 (en general, una décima parte por cada dígito). Como son $10^{2013}$ números, aquí llevamos $10^{2012}$ ochos. Sin embargo, esto lo vimos solamente en una de las posiciones posbiles, y como los números tienen 2013 posiciones, entonces la cantidad de ochos que escribimos es $2013 \times 10^{2012}$.

**Solución 16.** Empecemos por la casilla de la esquina superior izquerda. Para esta casilla tenemos 16 posibilidades, pero la elección de esta hará que la de su lado derecho solo pueda ser uno de los 8 números con la otra paridad a la elegida en un principio. La tercera casilla de esa misma fila tendrá que tener un número de la paridad distinta al que está en la segunda, es decir, igual que el primero, pero como ya tomamos uno de esa paridad para la primera casilla, solo tenemos 7 posibilidades, la última casilla de esa columna tendrá también 7 posibilidades, pues ya elegimos un número de esa paridad anteriormente. Notemos que la colocación de números debe ir alternando la paridad, y que al colocar el primer número el resto de paridades queda determinada. Completando el proceso que llevamos, obtenemos que las maneras de escribir los números como se pide es $16 \times 8 \times 7^2 \times 6^2 \times 5^2 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2$.

**Solución 17.** Notemos que la figura del centro es adyacente a todas las demás, por lo que el color que elijamos para esta no podrá volver a ser usado y el resto de las figuras deberán ser coloreadas con solamente 3 colores. En la figura se forman 4 regiones divididas por la figura del centro, veremos de cuántas formas es posible colorear cada una de estas regiones. Tenemos dos opciones: que para pintarla utilicemos 2 colores o que utilicemos 3 colores. Si usamos dos colores, para elegir el primero tenemos 3 posibilidades y sus dos figuras adyacentes deberán ser coloreadas de uno de los 2 colores restantes, finalmente, la cuarta figura debe ser coloreada del mismo color que usamos primero, así que si usamos dos colores hay $3 \times 2$ formas de pintar la región.
Si usamos 3 colores, para elegir el color para la primera figurita de la región tenemos 3 posibilidades, para la figura de un lado, podemos usar cualquiera de los 2 colores restantes, para la tercera figura podría ser el primer color o el que no hemos usado y la cuarta figurita ya quedaría determinada, así que en este caso tenemos $3 \times 2 \times 2$.
Así que las maneras de pintar UNA de las regiones es $3 \times 2 + 3 \times 2 \times 2$. Recordemos que al inicio elegimos uno de 4 colores posibles y que son 4 regiones como las que analizamos, por lo tanto, las maneras distintas de pintar la figura de la imagen con 4 colores es $4(3 \times 2 + 3 \times 2 \times 2)^4$.