31 Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Tamaulipas 2017

ETAPA REGIONAL
SOLUCIONES

Problemas:

1. Primero hay que dejar claro que el 1 y el 2, así como el 2 y el 4, el 3 y el 6 y el 4 y el 8 no pueden estar juntos. La ficha que cubre al 1 debe cubrir entonces también al 4, de igual forma, la que cubre al 3 debe cubrir al 2, puesto que no hay fichas de 1x1. Con estas restricciones tenemos que podemos cubrir el tablero de la siguiente forma:
   Forma 1. Una ficha de 1x2 cubriendo al 1 y al 4; una de 1x2 cubriendo al 2 y al 3; otra de 1x2 cubriendo al 5 y al 6; una de 1x3 cubriendo al 7, 8 y 9.
   Forma 2. Una ficha de 1x3 cubriendo al 1, al 4 y al 7; una de 1x2 cubriendo al 2 y al 3; otra de 1x2 cubriendo al 5 y al 6; una de 1x2 cubriendo al 8 y 9.
   Forma 3. Una ficha de 1x3 cubriendo al 1, al 4 y al 7; una de 1x2 cubriendo al 2 y al 3; una de 2x2 cubriendo al 5, al 6, al 8 y al 9.
   Forma 4. Una ficha de 1x3 cubriendo al 1, al 4 y al 5; una de 1x2 cubriendo al 2 y al 3; otra de 1x2 cubriendo al 5 y 8; una de 1x2 cubriendo al 6 y 9.

2. Tracemos FN y AN. Como AF y FB miden lo mismo, los triángulos ANF y FNB tienen la misma área puesto que tienen misma área y misma altura. Además, la suma de ambas áreas es un cuarto del área del rectángulo ABCD, es decir, cada una de estas áreas mide un octavo. Como el área de BNM también es igual a un cuarto del área del rectángulo, entonces el área FMN es igual a 1/4 + 1/8 = 3/8 del área de ABCD.

3. Por suma de ángulos de una circunferencia, el ángulo CDA debe ser de 40°. Además, el ángulo BMD debe ser de 140°, puesto que el ángulo adyacente es de 40°. Con BM=MD, el triángulo BMD es isósceles por lo que su ángulos iguales miden 20°, en particular BDM, Como el ángulo CDE es igual al CDA (40°) menos el ángulo BDM (20°), debe ser igual a 20°. Finalmente el ángulo CED es 180° - 90° - 20° = 70°.

4. Primero veamos que las únicas opciones de dígitos que suman 9 son (0,9), (1,8), (2,7), (3,6) y (4,5). Cada una de estas parejas puede ser *(a,b), (c,d), (e,f), (g,h)* o *(i,j)*. Para la primera pareja puede elegirse cualquiera de las 5, para la segunda tenemos 4 opciones, para la siguiente 3 opciones, luego 2 y la última pareja queda determinada. Además, por cada una de las parejas tenemos dos opciones, de acuerdo al orden de *a* y *b*. Así que tenemos 2^5 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1, pero debemos eliminar todas las opciones que contamos cuando el dígito *a* es 0, lo cual no es posible, pues no sería de 10 dígitos. Contándolas de la misma forma que antes obtenemos que son 2^4 x 4 x 3 x 2 x 1, posibilidades. Por lo tanto, la respuesta es 2^4 x 4 x 3 x 2 (9) = 3456.

5. Primero veamos que ninguno de los dígitos puede ser impar, pues en el momento que ese impar sea el último dígito, no tendremos múltiplo de 4. El 0 tampoco se puede utilizar pues cuando el número empiece con 0 no será de 4 dígitos. Los dígitos posibles son 2, 4, 6, 8. Hay que ver cuáles de estos números no forman múltiplos de 4. Notemos que basta ver múltiplos de 4 de dos dígitos, puesto que es lo que define la multiplicidad por 4. No pueden ir dos 2 en el número puesto que 22 no es múltiplo de 4. No puede ir un 2 y un 4 porque 42 no es múltiplo de 4. Tampoco pueden ir un 2 y un 6, puesto que 62 no es múltiplo de 4. Ni dos seis porque 66 no lo es. También descartamos el 4 con el 6 por el 46, el 2 con el 8 por el 82 y el 6 con el 8 por el 86. Por lo tanto las únicas opciones posibles son usar solo el 4 y el 8, puesto que 44, 48, 84 y 88 todos son múltiplos de 4. Por lo tanto, para cada uno de los 4 dígitos tenemos 2 opciones, es decir $2^4 = 16$ opciones.