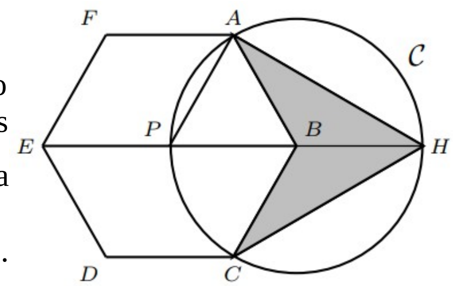
32 Olimpiada Mexicana de Matemáticas Tamaulipas 2018

ETAPA REGIONAL
SOLUCIONES

Problemas:



1. Llamemos P al centro del hexágono. Como BH, AB y el radio del círculo son iguales, tenemos que las áreas de los triángulos ABH, BCH y BAP son iguales entre sí e iguales a $\frac{1}{6}$ del área del hexágono ABCDEF. Así, el área sombreada es igual a $\frac{1}{3}$.

2. Si el número en la primer casilla es x entonces la casilla de la derecha y la de abajo tienen dos posibilidades para no sumar 0, digamos y y z. Si estas dos fueran la misma entonces la cuarta casilla tiene dos opciones para no sumar cero, pero si son diferentes solo le queda una opción. Así por cada x hay 6 opciones y como x tiene 3 posibilidades en total hay 18 posibilidades.

3. Los dígitos del número deben ser tomados del conjunto {0, 2, 4, 6, 8}. Para que el número sea divisible por 5, debe terminar en 0. Para que sea divisible por 3, sus dígitos deben sumar un número múltiplo de 3.
   - Si se toman dos dígitos el único posible es 60 pero no es múltiplo de 7.
   - Con tres dígitos se tiene 0 + 2 + 4 = 6 y 0 + 4 + 8 = 12, de donde se tienen 420 y 840 múltiplo de 7.
   - Si se toman todos los dígitos 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20 no es múltiplo de 3 por lo que no hay ningún número con todos los dígitos que cumpla.
   - Si se toman cuatro dígitos los únicos cuya suma es múltiplo de 3 son 0 + 2 + 4 + 6 = 12 y 0 + 4 + 6 + 8 = 18. Para saber si un número terminado en 0 es divisible por 7, basta con revisar si el número sin su último dígito 0 lo es. Del conjunto {2, 4, 6} todos los números que se pueden formar son 246, 264, 426, 462, 624, 642, de los cuales solamente 462 es divisible por 7. Del conjunto {4, 6, 8} todos los números que se pueden formar son 468, 486, 648, 684, 846, 864 de los cuales ninguno es divisible por 7.

   Por lo tanto los únicos que cumple lo pedido son 420, 840 y 4620.

4. Al ser un ángulo externo en el triángulo ECP, entonces <ACD = x + 33 (la suma de los internos no adyacentes a él). Como ABCD es un trapecio isósceles, entonces <BDC = <ACD = x + 33. Como <BPE es externo en el triángulo DPE, entonces <BPE = x + x + 33, pero además por hipótesis tenemos que <BPE = 5x, así que 2x + 33 = 5x, de donde se calcula que x = 11°.

5. Si haces 10 movimientos de 3 unidades a la derecha se llega al 30 y luego si se hacen dos movimientos de 4 unidades a la izquierda se llega al 22, como queremos, con 12 movimientos. Veamos si podemos hacerlo con menos de 12 movimientos. Notemos que si hacemos 7 movimientos de 3 a la derecha, llegamos al 21, así que al menos debemos hacer 8 movimientos

a la derecha. La pregunta ahora es ¿podemos movernos 1 con menos de 5 movimientos?. Dicho de otra manera, ¿podemos encontrar valores de x (movimientos de 3 a la derecha) y y (movimientos de 4 a la izquierda) que cumplan que $3x - 4y = 1$, pero además que $x + y < 5$. También sabemos que debemos hacer más movimientos de 3 a la derecha que de 4 a la izquierda porque si no, terminaríamos abajo del 21. Así que las únicas opciones a checar son $x = 2$, $y = 1$ o $x = 3$, $y = 1$, pero ninguna cumple la ecuación, así que 12 es el mínimo.

Alternativa: Notemos que si hacemos puros movimientos de 3 a la derecha, siempre estaremos llegando a múltiplos de 3. Si solo hacemos un movimiento de 4 a la izquierda, estaremos llegando a números que dejan residuo 2 al dividirlos por 3, pero este no es el caso del 22, así que al menos necesitamos hacer dos movimientos de 4 a la izquierda. Ya vimos que haciendo 10 movimientos de 3 a la derecha y 2 de 4 a la izquierda se llega. Como no importa el orden, solo que en algún momento recorrimos 30 lugares a la derecha y 8 a la izquierda, si aumentáramos el número de movimientos a la izquierda, también se tendría que aumentar el de movimientos a la izquierda, así que el mínimo es 12.