Examen Selectivo de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Soluciones

1. Como AB es diámetro $\angle APB = 90°$. Luego $\angle RPQ + \angle BQR = 90° + 90° = 180°$ y por lo tanto el cuadrilátero $PRQB$ es cíclico. Esto implica que $\angle RBQ = \angle RPQ$. Ahora, $\angle RPQ = \angle CPA$ por ser opuestos a un mismo vértice mientras que $\angle CPA = \angle CBA$ al ser inscritos en la circunferencia y abrir el mismo arco. Pero el triángulo $\triangle OCB$ es rectángulo e isóceles pues $\angle COB = 90°$ por suposición y $OC = OB$ por ser radios del círculo. Entonces, los ángulos iguales del triángulo isóceles deben medir $45°$ cada uno, en particular $\angle CBO = 45°$. Por lo tanto $\angle RBQ = 45°$, pero entonces tenemos en el triángulo $\triangle BQR$: $\angle RBQ = 45°, \angle RQB = 90°$ y el faltante debe ser $\angle BRQ = 45°$. Concluimos que $\triangle BQR$ es isóceles, y por lo tanto $BQ = RQ$.

2. Primero, factoricemos en primos: $3^a \times 6^b \times 9^c \times 12^d = 3^a \times (2 \times 3)^b \times (3^2)^c \times (2^2 \times 3)^d = 3^a \times 2^b \times 3^b \times 3^{2c} \times 2^{2d} \times 3^d = 2^{b+2d} \times 3^{a+b+2c+d}$. Entonces, para que $\sqrt[n]{3^a \times 6^b \times 9^c \times 12^d}$ sea entero se necesita que n sea divisor tanto de $a+b+2c+d$ como de $b+2d$. En particular, n debe ser menor que ambos. Ahora, observemos que $a+b+2c+d = (a+b+c+d)+c = 30+c$ (pues los a, b, c, d deben ser los números 3, 6, 9 y 12 en algún orden así que su suma debe ser 30). Entonces $a+b+2c+d$ sólo puede valer 33, 36, 39 ó 42. ¿Y cuánto es lo más que puede valer $b+2d$? Claramente el valor máximo se alcanza tomando $d = 12$ y $b = 9$ lo cual nos da $b+2d = 33$. Entonces, n no puede valer más de 33 (ya que debe valer menos que $b+2d$) y si tomamos $c = 3$ obtenemos $a+b+2c+d = 33$ con lo cual n en efecto sería un divisor tanto de $a+b+2c+d$ como de $b+2d$. Por lo tanto, tomando $a = 6, b = 9, c = 3, d = 12$ y $n = 33$ obtenemos que $\sqrt[n]{3^a \times 6^b \times 9^c \times 12^d}$ es entero y éste es el máximo n que puede cumplirlo.

3. Observemos cualquiera de las cuatro esquinas exteriores de la cuadrícula. Si los sentidos de las dos calles que forman esa esquina son tales que ambas "llegan" a esa esquina entonces nuestra asiganición no será acetable pues no podríamos ir de esa esquina a ningún otro punto. De la misma manera, si ambas calles

“salen”de la esquina nuestra asignación tampoco será aceptable pues será imposible llegar a esa esquina. Por lo tanto, debe haber una calle que llega a la esquina y una que sale de ella, pero como esto es válido para las cuatro esquinas externas lo que obtenemos es que, para que nuestro acomodo pueda ser aceptable, debemos porder darle la vuelta a la ciudad pasando solamente por las cuatro calles que la delimitan (ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o en contra). Notemos ahora que esta condición es, de hecho, suficiente para garantizar la aceptabilidad de la asignación: si estamos en una esquina A en cualquier lugar de la ciudad y queremos llegar a otra esquina B basta seguir cualquiera de las calles que pasan por A hasta llegar a la orilla de la ciudad y movernos hasta llegar al comienzo de una calle que nos lleve a B (que debe existir sin importar como se haya hacho la asignación y debemos poder llegar a ella pues podemos darle toda la vuelta a la ciudad sobre la orilla). Entonces, para tener una asignación aceptable el alcalde sólo debe darle orientación a la orilla de manera que se pueda dar la vuelta a la ciudad sobre ésta y el resto de las calles pueden tener cualquier orientación. Entonces, el alcalde tiene 2 opciones para la orilla (giro en el sentido de las manecillas del reloj o opuesto a), 2 opciones para cada una de las otras $m-1$ calles verticales y 2 opciones para cada una de las otras $n-1$ challes horizontales, es decir tiene $2 \times 2^{m-1} \times 2^{n-1} = \mathbf{2^{m+n-1}}$ opciones en total.