30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Primer Examen Selectivo

28 de Agosto de 2016

Problema 1. Encuentra todas las parejas de enteros positivos m y n tales que

$$(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3.$$

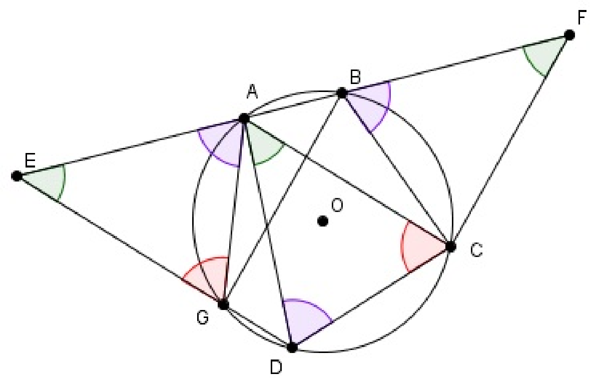
Solución. Por un lado tenemos que $(m^2+n)(m+n^2) = m^3+m^2n^2+mn+n^3$ y por otro lado sabemos que $(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$, así que necesitamos encontrar las parejas de enteros positivos que cumplen que $m^3+m^2n^2+mn+n^3 = m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$, o bien, $m^2n^2 + mn = 3m^2n + 3mn^2$, ya que podemos restar $m^3 + n^3$ de ambos lados de la igualdad. Factorizando obtenemos que $mn(mn + 1) = mn(3m + 3n)$. Como m y n son enteros positivos, $mn \neq 0$, por lo que podemos deducir que $mn-3m-3n+1 = 0$. Sumando 8 de ambos lados llegamos a la ecuación $mn - 3m - 3n + 9 = 8$. La parte izquierda de la ecuación la podemos factorizar y obtener que $(m - 3)(n - 3) = 8$. Tanto $m - 3$ como $n - 3$ son enteros, entonces las opciones que tenemos es que sean 1, 2, 4 y 8.

- Si $m - 3 = 1$, $n - 3 = 8$, entonces $m = 4$ y $n = 11$.
- Si $m - 3 = 2$, $n - 3 = 4$, entonces $m = 5$ y $n = 7$.
- Si $m - 3 = 4$, $n - 3 = 2$, entonces $m = 7$ y $n = 5$.
- Si $m - 3 = 8$, $n - 3 = 1$, entonces $m = 11$ y $n = 4$.

Y estas son las 4 soluciones.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y E y F puntos sobre la recta AB pero fuera del segmento AB con A entre E y B y B entre A y F. Demuestra que si $\angle BED = \angle AFC = \angle DAC$ entonces $EA = BF$.

Solución. Sea G la intersección de ED con la circunferencia circunscrita a $ABCD$. Por hipótesis del problema tenemos que $\angle AEG = \angle BFC = \angle DAC$. Como $ABCD$ es cíclico, $\angle FBC = \angle ADC$, pues ambos son suplementarios de $\angle ABC$, entonces, como tienen dos ángulos iguales, $\triangle ADC$ y $\triangle FBC$ son semejantes. Ahora, como $AGDC$ es cíclico, $\angle AGE = \angle ACD$ pues ambos son suplementarios de $\angle AGD$, por lo tanto $\triangle AEG$ es semejante a ADC. Tenemos entonces $\triangle FBC \simeq \triangle ADC \simeq \triangle AEG$. Ahora debemos ver dichos triángulos son congruentes, así tendríamos lo buscado. Veamos que los triángulos $\triangle BAG$ y $\triangle ABC$ son semejantes pues ambos tienen un ángulo que abre el arco AB y uno suplementario del $\angle ABC = \angle BAG$. Además tienen el lado AB común, por lo tanto son congruentes, así $AG = BC$ y por lo tanto $\triangle AGE = \triangle BCF$, de donde concluimos que $AE = BF$.



Solución Alternativa. Tenemos que $\triangle ADC \simeq \triangle FBC$ ya que $\angle D = \angle B$ pues $ABCD$ es cíclico y $\angle F = \angle A$ por hipótesis del problema. De igual forma $\triangle EDA \simeq \triangle BDC$. Por lo tanto, la primera semejanza implica que $\frac{AD}{DC} = \frac{FB}{BC}$ y la segunda semejanza implica que $\frac{EA}{DA} = \frac{BC}{DC}$. Combinando ambas proporciones tenemos que

$$EA = \frac{DA \cdot BC}{DC} = FB.$$

Problema 3. Encuentra todos los números naturales n de tres dígitos que son iguales al número formado por los tres últimos dígitos de n^2.

Solución. Sea n un número que cumple. Por lo tanto $n^2 - n$ debe ser un múltiplo de 1000. Dicho de otra manera $n(n-1) = 2^3 \cdot 5^3 k$. Notemos que n y $n-1$ son números consecutivos, por lo tanto, también son primos relativos. Notemos que $\frac{n(n-1)}{2^3 \cdot 5^3} = k$ es un entero, pero como n y $n-1$ son primos relativos, solo uno de ellos tiene factores 2 y solo uno de ellos tiene factores 5. Tenemos los siguientes casos:

- $1000|n$. Pero no hay números de tres dígitos que cumplan eso.
- $1000|n-1$. Pero no hay números de tres dígitos que cumplan eso.
- $2^3|n$, $5^3|n-1$. Los múltiplos de 125 de tres dígitos son 125, 250, 375, 500, 625, 750 y 875, de ellos el único que al sumarle 1 resulta un múltiplo de 8 es el 376.
- $2^3|n-1$, $5^3|n$. De los múltiplos de 125 de tres dígitos que al restarle 1 dan un múltiplo de 8 es el 625.

Por lo tanto $n = 376$ o $n = 625$.

Solución Alternativa. Sea $n = abc$, donde a, b, c representan dígitos y entonces $n^2 = defabc$. $c = 0, 1, 5, 6$, pues son los únicos dígitos que al multiplicarse por si mismos resultan un número que termina en si mismos. Analicemos los casos:

- $c = 0$: Eso implica que $10|n$, por lo tanto $100|n^2$, por lo tanto $b = 0$, como $n = a00$ quiere decir que $10000|n^2$, por lo tanto a también debería ser 0, así que este caso no es posible.

- $c = 1$: Tenemos que $n = ab1 = 100a + 10b + 1$, entonces el número de las decenas de n^2 estará dado por $(10b + 1)^2 = 100b^2 + 20b + 1$, así $10b + 1$ debe ser igual a $20b + 1$ pues los otros términos ya están a partir de las centenas, por lo tanto $20b = 10b$, de donde obtenemos que $b = 0$, o bien $2b = b + 10$, en el caso que llevemos una de la multiplicación de las unidades, pero eso implica que $b = 10$, que tampoco es posible. De igual forma las centenas están dadas por $(100a + 1)^2 = 10000a^2 + 200a + 1$, y debe cumplirse que $200a + 1 = 100a + 1$, es decir, $a = 0$. Así n no sería de tres dígitos y entonces este caso tampoco es posible.

- $c = 5$: Tenemos que $n = ab1 = 100a + 10b + 5$, entonces el número de las decenas de n^2 estará dado por $(10b + 5)^2 = 100b^2 + 100b + 25$, así $10b + 5$ debe ser igual a 25 pues los otros términos ya están a partir de las centenas, entonces $b = 2$. Ahora bien, las centenas están dadas por $(100a + 25)^2 = 10000a^2 + 5000a + 625$, por lo tanto $100a + 25 = 625$, es decir, $a = 6$. Así, para este caso tenemos $n = 625$.

- $c = 6$: Tenemos que $n = ab1 = 100a + 10b + 6$, entonces el número de las decenas de n^2 estará dado por $(10b+6)^2 = 100b^2 + 120b + 36$, así $10b+6$ debe ser igual a $20b+36$ pues los otros términos ya están a partir de las centenas, entonces $20b+36 = 10b+6$, es decir tenemos la posibilidad de que $2b+3 = b$ o $2b+3 = b+10$, en el caso que llevemos 1 de la multiplicación de las unidades. El primer caso no es posible y el segundo tenemos que $b = 7$. Para a tenemos que $(100a + 76)^2 = 10000a^2 + 15200a + 5776$ y las centenas están dadas por $200a + 776 = 100a + 76$, es decir, $2a + 7 = a$ o $2a + 7 = a + 10$ en caso de llevar uno de la multiplicación anterior. De la segunda tenemos que $a = 3$. Para este caso tenemos $n = 376$.

Por lo tanto $n = 376$ o $n = 625$.