30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Soluciones Jornada 1

30 de julio de 2016

Problema N1. Encuentra todos los números de tres dígitos tal que la suma de los factoriales de los tres dígitos por los que está formado el número, sea igual al número.

Solución.(Por Jesús Anaya Ningún dígito puede ser mayor o igual a 7, pues el lado izquierdo sería mayor a mil, del mismo modo si algún digito es 6 el lado izquierdo es mayor a 720 lo que haria que el número de la derecha de la igualdad tenga algún digito 7,8 ó 9 que concluimos no podia suceder. Por tanto cada dígito es a lo más 5. De este modo el máximo valor que puede tomar el lado de la izquierda es $3 \times 5! = 360$ es decir $a = 1, 2$ ó 3. Por otro lado alguno dígito debe ser 5, de otro modo el lado izquierdo su máximo valor seria $3 \times 4! = 72$ que es menor a 100 y no podria ser un número de 3 digitos. Hay tres casos:

- $a = 1$. Tendríamos que $a! + b! + c! \geq 1 + 5! = 121$, pues alguno de b ó c es 5, el otro dígito puede tomar cualquier valor de 0 a 4, viendo cada uno sólo con 4 da solución ya que $1! + 4! + 5! = 145$.

- $a = 2$. Asi $a! + b! + c! \geq 200$ y sin pérdida de generalidad $b = 5$ entonces $c! \geq 78$ lo que hace que $c \geq 5$ y entonces $c = 5$. Y no se daria la igualdad pues $2! + 5! + 5!$ es 242 y no 255.

- $a = 3$. $a! + b! + c! \geq 300$ y sin pérdida de generalidad $b = 5$ entonces $c! \geq 174$ lo que hace que $c \geq 6$ pero ya habiamos visto que esto no es posible.

Problema N2. Sean a, b y c tres dígitos distintos, con $a \neq 0$. Considera los números de seis dígitos $N = abcabc$ y $M = abccba$.

a) Demuestra que N y M no pueden ser primos relativos.

b) Encuentra a, b y c para que $mcd(N, M) = 495$.

Solución. Para la parte a) notemos $a + c + b - b - a - c = 0$ y por el criterio de divisibilidad del 11, entonces $11|N$, de igual forma $11|M$, por lo tanto $mcd(N, M) \geq 11$ y por lo tanto no son primos relativos. Para la parte b), como $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$, debemos hacer que tanto N como M tengan estos factores comunes. Para el 5 necesitamos que a sea 5, pues no puede ser 0 y por lo tanto $c = 0$, ahora bien, para que 9 divida a los números necesitamos que la suma de sus dígitos sea un múltiplo de nueve, es decir: $2(a + b + c)$, para esto $c = 4$.

Con esto aseguramos que $mcd(N, M) \geq 495$, pero notemos que $\frac{N}{495} = 1092$ y $\frac{M}{495} = 1091$, como son números consecutivos, son primos relativos, lo que implica que no tienen más factores en común. Por lo tanto $mcd(N, M) = 495$.

Problema N3. Determina todos los enteros a para los cuales $a + 1$ y $a^2 + 1$ son ambos potencias de dos.

Solución. Supongamos que ambos son potencias de dos, entonces la más chica divide a la más grande esto es: $a + 1 | a^2 + 1$ pero $a + 1 | a^2 - 1$ por se una diferencia de cuadrados, por consiguiente $a + 1 | (a^2 + 1) - (a^2 - 1) = 2$ esto hace que $a + 1 | 2$ implica que $a = 0, 1$ y como ambos dan potencias de dos sustituyéndolo, son solución, $a = 0$ da las potencias 1 y 1, $a = 1$ da las potencias 2 y 2.

Problema N4. Encontrar todos los enteros n menores a 100 tales que $n + 2$, $n + 4$, $n + 8$ y $n + 16$ sean números primos.

Solución (por Juan Pizaña). Primero que todo descartamos los números que de ninguna manera nos pueden servir: Todos los números que acaben en 2, 4, 6, 8 y 0, al ser números pares, la suma con los números 2, 4, 8 y 16 dará un número par y eso ya lo convierte en un número divisible por 2. Tampoco podemos tomar ningún número terminado en 1, 3, 7 y 9 ya que $x3 + 2 = z5$, $x7 + 8 = z5$, $x9 + 16 = z5$, donde x y z son dígitos. Estos números son divisibles por 5, por lo tanto no pueden ser primos (el 3 no se elimina, ya que 5 es primo por sí mismo, lo checaremos aparte). Ahora, con todo el descarte nos quedan estos números por checar: 3, 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 y 95, ya siendo mucho menos podemos hacer la comprobación uno a uno. Después de eso vemos que los únicos números que funcionan son $n = 3$ y $n = 15$.

Problema C1. Sea A un conjunto de números naturales menores que 1000. Ninguno de ellos es cuadrado perfecto, pero el producto de dos cualesquiera de los elementos de A es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el mayor número de elementos que puede tener A?

Solución (por Julieta). Como cualesquiera que sean los números, el producto de dos de ellos debe ser un cuadrado, si en la factorización en primos de algún elemento de A aparece un primo a una potencia impar, ese número debe estar en la factorización de todos los elementos de A con exponente impar. También si uno de los elementos contiene un primo a potencia par, éste primo no puede estar a potencia impar en ningún elemento. Entonces, si hay factores con exponente impar, deben estar en todos los elementos al menos a potencia 1. Una potencia impar mayor que 1 puede expresarse como el número base a una potencia par multiplicado por el número base. Entonces sabemos que hay un número producto de los primos que aparezcan a potencia impar que estará como factor en todos los elementos de A y que al dividir cualquier elemento de A entre este número, el resultado será un número cuadrado. Entonces la cantidad máxima de elementos de A dependerá de la cantidad de cuadrados menores que 1000 entre el número. Es claro que el número mencionado debe ser el más pequeño posible. El primo más pequeño es el 2, y hay 22 cuadrados menores a 1000.

Problema C2. ¿De cuántas maneras podemos tomar tres fichas de dominó de tal forma que entre las tres aparezcan por lo menos cinco números distintos?.

Solución (ideas por Yessica Ponce con otra técnica que conteo). Separaremos en 3 casos: a) Todas las fichas distintas; b) Dos fichas con un número en común y los demás dinstintos entre sí; c) Una mula y las otras con números distintos entre sí.

Caso a) Todas las fichas sin ningún número en común: Para la primera ficha debemos elegir 2 números de los 7 posibles para determinar una de las fichas, es decir, ¿de cuántas formas podemos elegir 2 números de 7, $\binom{7}{2} = 21$. Como ya elegimos 2 números y la segunda ficha debe tener números distintos, debemos elegir 2 de 5 posibles, es decir, para elegir la segunda forma hay $\binom{5}{2} = 10$ formas. Análogamente para la tercera ficha hay $\binom{3}{2} = 3$ posibilidades. Como no importa qué ficha tomo primero, debemos eliminar repeticiones dividiendo por 3!, pues cada elección fue contada 6 veces. Para el caso a) tenemos $\frac{21 \cdot 10 \cdot 3}{6} = 105$.

Caso b) Dos fichas con un número en común y los demás distintos entre sí: Tomaremos primero el número en común, para eso tenemos 7 opciones. Para el otro número en la primera de estas fichas tenemos 6 opciones, para la segunda de las fichas tenemos 5 opciones (pues ya elegimos 2 números), pero notemos que hay que dividir por 2 porque no importa cuál elegimos primero (estaríamos contando doble casos como tomar $(0,1),(0,2)$ o $(0,2),(0,1)$. Para la tercera ficha debemos elegir 2 de los 4 números restantes, $\binom{4}{2} = 6$, es decir, para este caso tenemos $7 \cdot 15 \cdot 6 = 630$ casos.

Caso c) Una mula y las otras con números distintos: Para el número de la mula tenemos 7 opciones. Para la primera de las otras fichas debemos elegir 2 de los 6 números restantes, $\binom{6}{2} = 15$, para la última ficha debemos elegir 2 de los 4 números restantes, $\binom{4}{2} = 6$, pero la elección de las últimas dos fichas es indistinta, por lo que hay que dividir por 2, así que el total de posibilidades para este caso es $\frac{7 \cdot 15 \cdot 6}{2} = 315$. El resultado entonces es $105 + 630 + 315 = 1050$.

Problema C3. Dadas 9 personas, demuestre que existe un valor de n tal que con las personas se puede formar n grupos de a 3, de modo que cada par de personas se encuentran en exactamente uno de dichos grupos. Si el mismo número de grupos debe formarse, pero de 6 personas cada uno y con la condición de que cada par se encuentre en exactamente k grupos, determine si existe un valor de k que hace posible que el problema tenga solución.

Solución (por Luis Reyes). Cada grupo de 3 nos debe dar $\binom{3}{2} = 3$ parejas que no deben estar en otros grupos de 3, y como en total hay $\binom{9}{2} = 36$ parejas, el total de grupos viene dado por $n = \frac{36}{3} = 12$. Para demostrar su existencia damos el siguiente ejemplo: $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$, $(1,4,7)$, $(1,5,8)$, $(1,6,9)$, $(2,4,8)$, $(2,5,9)$, $(2,6,7)$, $(3,4,9)$, $(3,5,7)$, $(3,6,8)$. Ahora, cada grupo de 6 hará $\binom{6}{2}$ grupos de 2 y como son 12 grupos entonces habrá $\binom{6}{2}(12)$ pares de personas y como en total hay $\binom{9}{2}$ parejas diferentes, entonces $k = \frac{\binom{6}{2}(12)}{\binom{9}{2}} = 5$. Para demostrar la existencia veamos un ejemplo: $(4,5,6,7,8,9)$, $(1,2,3,7,8,9)$, $(1,2,3,4,5,6)$, $(2,3,5,6,8,9)$, $(2,3,4,6,7,9)$, $(2,3,4,5,7,8)$, $(1,3,5,6,7,9)$, $(1,3,4,6,7,8)$, $(1,3,4,5,8,9)$, $(1,2,5,6,7,8)$, $(1,2,4,6,8,9)$, $(1,2,4,5,7,9)$.

Problema C4. Un triángulo equilátero de lado 3 se divide mediante líneas paralelas a los lados en 9 triangulitos equiláteros de lado 1. Dos triangulitos se dicen adyacentes si tienen un lado común. Escribe los números del 1 al 9, uno en cada triangulito, de manera que cada número sea divisible entre el número de triangulitos adyacentes al que ocupa. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer esto?

Solución.(Por Áxel) A cada equilátero le asignamos A, B, C en caso de tener $1, 2, 3$ adyacentes respectivamente. Como hay tres marcados con C entonces cada uno debe tener $3, 6$ ó 9 escrito en él. Estos se pueden permutar de $3! = 6$ maneras. Ahora el 1 debe ir en las esquinas ya que sólo es divisible por sí mismo, el 5 y 7 también pues no hay equiláteros con 5 ó 7 adyacentes. Entonces en las esquinas deben ir 1,5 y 7, estos también se pueden permutar de 6 maneras. Finalmente deberíamos poder acomodar los números 2,4 y 8 en los equiláteros marcados con B, lo cual sí es posible pues estos números son pares, también se permutan de 6 maneras. En total hay $6^3 = 216$ maneras.

Problema A1. Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} x + y + z = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 2 \\ x - 3y^2 + z = 0. \end{gathered}$$

Solución. De la tercera ecuación despejamos $x + z = 3y^2$, que al sustituirla en la primera obtenemos $3y^2 + y - 2 = 0$. Esta es una ecuación de segundo grado, que podemos resolver con la fórmula general. Las soluciones son $y = -1$ o $y = \frac{2}{3}$, pero como solo nos interesan las soluciones enteras, entonces $y = -1$. Sustituyendo el valor de y nos quedan las siguientes ecuaciones $x + z = 3$ y $x^2 - z^2 = 3$. La segunda ecuación la podemos ver como $(x + z)(x - z) = 3$, y como $x + z = 3$, entonces $x - z = 1$. Estas dos ecuaciones las podemos ver como un sistema a resolver, de donde obtenemos que $x = 2$ y $z = 1$.

Problema A2. Dados dos triángulos isósceles de lados x, x , 3 y x, x, 4 que tienen la misma área ¿Cuál es el valor de x?

Solución. Por la fórmula de Herón, como las áreas de los triángulos son iguales, tenemos que:

$$\sqrt{\frac{2x+3}{2}\left(\frac{2x+3}{2}-x\right)^2\left(\frac{2x+3}{2}-3\right)} = \sqrt{\frac{2x+4}{2}\left(\frac{2x+4}{2}-x\right)^2\left(\frac{2x+4}{2}-4\right)}.$$

Elevando al cuadrado la expresión y simplificando:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{-3}{2}\right)=(x+2)(2)(2)(x-2).$$

Al multiplicar los términos tenemos que $9(4x^2-9)=64(x^2-4)$. De aquí, al desarrollar: $36x^2-81=64x^2-256$ y se despeja a $28x^2=175$, por lo tanto $x=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

Problema A3. Sean x, y y z tres números reales positivos diferentes entre sí. Si

$$\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$$

¿cuánto vale $\frac{x}{y}$?

Solución. De $\frac{y}{x-z}=\frac{x}{y}$ obtenemos que $y^2=x^2-xz$. De $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}$ obtenemos que $yz=(x-z)(x+y)=x^2-xz+xy-yz$. Pero como $y^2=x^2-xz$, podemos sustituirlo en la ecuación, que queda $2yz=y^2+xy=y(y+x)$. Pasando yz a dividir obtenemos la ecuación $2=\frac{x+y}{z}$, pero $\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$. Por lo tanto $\frac{x}{y}=2$.

Solución Alternativa por Salvador. Usaremos la siguiente propiedad conocida: Si tenemos a, b, c y d números reales tales que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$.

Una vez sabiendo esto lo podemos aplicar al problema:

$$\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}\Rightarrow\frac{y+x+y}{x-z+z}=\frac{2y+x}{x}=\frac{x}{y}$$

y volviéndolo a aplicar:

$$\frac{2y+x}{x}=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{2y+2x}{x+y}=\frac{2(x+y)}{x+y}=2.$$

Problema A4. Simplifica la expresión

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+99\cdot 99!.$$

Solución. Veamos que $(n+1)!=(n+1)n!=n\cdot n!+n!$, por lo tanto $(n+1)!-n!=n\cdot n!$. Así que $1\cdot 1!=2!-1!$, $2\cdot 2!=3!-2!$, $3\cdot 3!=4!-3!$ y así sucesivamente, hasta $98\cdot 98!=99!-98!$ 7 $99\cdot 99!=100!-99!$. Sumando todos los términos de la izquierda tenemos la igualdad a la suma de los términos de la derecha, que se van cancelando por parejas (cancelación telescópica), por lo tanto:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+99\cdot 99!=100!-1.$$

Problema G1. Sea ABC un triángulo y D, E y F puntos sobre el lado BA tales que CD es altura, CE es bisectriz de $\angle ACD$ y CF es bisectriz de $\angle DCB$. Demuestra que si el incentro de $\triangle ABC$ coincide con el circuncentro de $\triangle ECF$, entonces $\angle BCA = 90°$

Solución. Sea I el incentro del triángulo ABC (que a su vez es circuncentro del triángulo CEF), sean G y H los pies de las perpendiculares desde I a AC y AB, respectivamente y sea $\lambda = \frac{1}{2}\angle BCA$. Como CI es la bisectriz del ángulo $\angle BCA$, $\angle ICG = \lambda$. Además CE y CF son bisectrices de los ángulos $\angle DCA$ y $\angle BCD$, respectivamente, tenemos que:

$$\angle FCE = \angle FCD + \angle DCE = \frac{1}{2}\angle BCD + \frac{1}{2}\angle DCA = \frac{1}{2}\angle BCA = \lambda.$$

Luego, como I es el circuncentro del triángulo CEF, $\angle FIE = 2\angle FCE = 2\lambda$ y como los triángulos FIH y EIH son congruentes tenemos que $\angle FIH = \angle HIE = \lambda$. Consideremos los triángulos rectángulos HIE y GIC. Tenemos que $IC = IE$, por ser I el circuncentro del triángulo CEF y $GI = HI$ por ser I el incentro del triángulo ABC. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $CG = EH$ y los triángulos son congruentes, de donde $\angle GIC = \angle HIE = \lambda$. Entonces el triángulo GIC tiene ángulos λ, λ y $90°$ de donde $\lambda = 45°$ y $\angle BCA = 90°$.

Problema G2. En el rectángulo $ABCD$ sea P el punto medio de AB y sea Q un punto sobre el segmento PD tal que $\angle CQD = 90°$. Demuestra que BCQ es un triángulo isósceles.

Solución. Extendemos DP hasta que corte a BC en R. Como $PB||DC$ y PB mide la mitad de DC por teorema de línea media $RB = BC$, ahora $\triangle RQC$ es triángulo rectángulo con circuncentro sobre el punto medio de la hipotenusa es decir su circuncentro es B, por tanto $BQ = BC$.

Problema G3. Considera la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC (con $AC = BC$. En el arco BC, opuesto al punto A, se elige un punto D. Sea E un punto en AD tal que CE y AD son perpendiculares. Demuestra que $AE = BD + DE$.

Solución (por Jesús Anaya). Consideramos al punto K sobre AE tal que $DE = EK$. Tenemos que CE es altura de $\triangle CDK$, pero también es mediatriz, por lo tanto $\triangle DCK$ es isósceles, es decir, $CD = CK$. Como $\triangle BCA$ es isósceles también tenemos que $BC = AC$. Por el cuadrilátero $ABDC$ cíclico, tenemos que $\angle ADC = \angle ABC$, que es el ángulo repetido en ambos triángulos isósceles, por lo tanto $\angle DCK = \angle BCA$, lo que implica que $\angle DCB = \angle KCA$ y por criterio LAL de congruencia de triángulos, $\triangle CDB = \triangle CKA$. De aquí que $AE = AK + EK$, pero $AK = DB$ por la congruencia y $EK = ED$ por construcción, así $AE = DB + ED$.

Problema G4. Sea E un punto sobre el lado AC del triángulo ABC. Por el vértice B tracemos una recta arbitraria ℓ. Por E, se traza una recta paralela a BC la cual corta a ℓ en el punto N. También por E, se traza una recta paralela a AB la cual corta ℓ en el punto

M. Demuestra que AN es paralelo a CM.

Solución (por Carlos Delgado). Sea G la intersección de BC y ME y H la intersección de BA con EN. Por las condiciones del problema tenemos que $BHEG$ es un paralelogramo y por lo tanto $\angle MGC = \angle BGE = \angle BHE = \angle NHA = \beta$. Además, por ser opuestos por el vértice y por paralelas $\angle CGE = \angle MGB = \angle BHN = \angle EHA = \alpha$. También por las paralelas tenemos que $\angle BCA = \angle NEA$ y $\angle CBM = \angle ENM$. Notemos que si demostramos que $\triangle CGM \simeq \triangle NHA$, tendríamos que $\angle GCM = \angle HNA$ y como $BC||NE$, entonces se tendría también que $MC||AN$. Busquemos demostrar esa semejanza. Dichos triángulos tienen un ángulo β común, así que por criterio LAL de semejanza, debemos buscar que los ángulos correspondientes sean proporcionales, es decir, $\frac{GM}{HA} = \frac{GC}{HN}$, por lo tanto hay que demostrar que $GM \cdot HN = GC \cdot HA$. Por los ángulos marcados tenemos que $\triangle CGE \simeq \triangle EHA$ y $\triangle GBM \simeq \triangle HNB$. De aquí obtenemos que $\frac{AH}{EG} = \frac{EH}{CG}$ y $\frac{GM}{HB} = \frac{BG}{NH}$, lo que implica que $AH \cdot GC = GE \cdot HE$ y $GM \cdot HN = BH \cdot BG$. Pero por el paralelogramo, $BG = HE$ y $BH = GE$, por lo tanto $GM \cdot HN = BH \cdot BG = GE \cdot HE = AH \cdot GC$, que es justo lo que queríamos demostrar.