30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Soluciones Jornada 2

7 de agosto de 2016

Problema N1. En cada cara de un cubo se escribe un entero mayor a cero y en cada vértice se escribe el producto de los números escritos en las caras que llegan a dicho vértice. Si la suma de los números en los vértices es 1001. ¿Cuál es la suma de los números escritos en las caras?

Solución (Por Luis Reyes). Llamenos a, b, c, d, e, f a los números en cada una de las caras del cubo, por lo tanto $aef + afc + afb + bca + dfb + cdb + efd + dce = 1001$. Factoricemos las que tienen factor común c y las que tienen factor común f. Entonces: $c(ab + bd + de + ea) + f(ab + bd + de + ea) = 1001$, así que $(c + f)(ab + bd + de + ea)$. Notemos que podemos seguir factorizando. $(c + f)(b(a + d) + e(d + a)) = 1001$. Por lo tanto $(c + f)(b + e)(a + d) = 1001$. Como $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, cada uno de los factores $c + f$, $b + e$ y $a + d$ deben ser alguno de ellos. Por lo tanto la suma de las caras es $c + f + b + e + a + d = 7 + 11 + 13 = 31$.

Problema N2. Muestra que para cualquier pareja de enteros positivos a y b, el número $(36a + b)(a + 36b)$ no puede ser una potencia de dos.

Solución (Por Carlos Delgado). Tenemos que $(36a+b)(a+36b) = 36a^2+36^2ab+ab+36b^2$. Notemos además que $(6a+6b)^2 = 36a^2+72ab+36b^2$, por lo que $36a^2+1297ab+36b^2 = (6a + 6b)^2 + 1225$. Ahora bien $6a + 6b$ es par y por lo tanto su cuadrado también es par. Como un par más un impar es un impar y 1225 es impar, entonces $(6a + 6b)^2 + 1225$ es impar y por lo tanto también $(36a + b)(a + 36b)$. Se sabe que ninguna potencia de dos es impar, exceptuando al 1, pero como a y b son enteros positivos, $(36a + b)(a + 36b)$ no puede ser una potencia de dos.

Problema N3. Encuentra todas las ternas (a, b, c) tales que $a + b + c = 29$ y que su producto tenga exactamente 8 divisores.

Solución. Si un número n tiene su descomposición en primos $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, en número de divisores de n es $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. Como $8 = 2^3$, tenemos las siguientes opciones para a, b y c: i) Que sean números primos (nos da en la fórmula de número de divisores $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$). ii) Que uno sea 1, y los otros dos un primo y un producto de otros dos primos. iii) Que uno sea un primo, que el segundo sea otro primo y el tercero el cuadrado de uno de los primos ya elegidos (igual en la fórmula tendríamos $4 \cdot 2 = 8$). En teoría también podría ser que tengamos un primo a la séptima potencia, pero 29 no es la séptima potencia de ningún número. Para el caso 1 tenemos las siguientes tres ternas: $(3, 7, 19)$, $(5, 7, 17)$, $(5, 11, 13)$. Para el segundo caso nos queda solo la terna $(1, 13, 15)$. Finalmente del tercer caso obtenemos $(2, 4, 23)$ y $(3, 9, 17)$.

Problema N4. Si $S(n)$ es la suma de dígitos de n. Encuentra todos los enteros positivos n tal es que $n(S(n) - 1) = 2010$.

Solución (por Yessica Ponce). Tenemos que $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Los divisores de 2010 son 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005 y 2010. Podemos checar caso a caso cuál nos queda que al multiplicarlo por la suma de sus cifras menos uno nos da 2010. $2010(3 - 1)$ no funciona. $1005(6 - 1)$, $2010(3 - 1)$ no funciona. $670(13 - 1)$ no funciona. $402(6-1)$ sí funciona. $335(11-1)$ no funciona. $201(3-1)$ no funciona. $134(8-1)$ no funciona. $67(13 - 1)$ no funciona. Por lo tanto la única solución es $n = 402$.

Problema C1. Seis cajas están númeradas $1, 2, \ldots, 6$. Se van a repatir N pelotas en ellas, determina el valor más chico de N tal que para al menos un valor k, la caja con el número k tenga al menos k^2 pelotas.

Solución (por Roberto). Tenemos las 6 cajas y sus cuadrados son 1, 4, 9, 16, 25, 36. Nos vamos al caso extremo en el que a todas las cajas les falte una bola para asegurar el cuadrado, esto es $0 + 3 + 8 + 15 + 24 + 35 = 85$. Con una bola más nos aseguramos que en al menos una caja habrá k^2 pelotas.

Problema C2. A un conjunto lo llamaremos *triferenciado* si tiene al menos dos elementos y la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es mayor o igual que 3. ¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ son *triferenciados*?

Solución. Separemos en casos según el número de elementos de los subconjuntos. El máximo de elementos que puede tener es 4, pues comenzando con el 1 tenemos el único caso $\{1, 4, 7, 10\}$. Chequemos los de 2 elementos: Cuando el primer elemento es el 1, el segundo puede ser 4 o más, es decir, tenemos 7 opciones. Comenzando con 2, el segundo puede ser 5 o más, es decir 6 opciones y así sucesivamente. Por lo tanto, con dos opciones tenemos $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$. Para los de 3 elementos, podemos tomar el mismo conteo anterior. Por ejemplo, los que comienzan con 1, para el segundo elemento puede ser 4, 5, 6 o 7, ya no podría ser 8 porque el siguiente término no podría ser menor a 10. Y estos casos son precisamente los casos que ya contamos anteriormente, es decir, las parejas $\{4, 7\}$, $\{4, 8\}$, $\{4, 9\}$, $\{4, 10\}$,$\{5, 8\}$, $\{5, 9\}$, $\{5, 10\}$,$\{6, 9\}$, $\{6, 10\}$,$\{7, 10\}$, es decir, 10 casos. Cuando comienza con 2 tenemos solo el 2 con cualquiera de las últimas 6 parejas, cuando el subconjunto comienza con 3, tenemos las últimas 3 parejas y cuando comienza con 4 solo tenemos 1 caso. En total son $28 + 10 + 6 + 3 + 1 + 1 = 49$.

Problema C3. En una cuadrícula de 2017×2017 se consideran como puntos todos los vértices de los cuadrados. ¿Cuántos rectángulos con vértices en los puntos marcados se pueden formar si se quiere que los lados sean paralelos a los lados de la cuadrícula? Nota: Recuerda que los cuadrados también son rectángulos.

Solución. Tomemos una de las 2018 líneas de la cuadrícula. En ella tenemos 2018 puntos, como los lados del rectángulo deben ser paralelos a los lados de la cuadrícula, podemos tomar dos de los puntos para la base de $\binom{2018}{2}$ formas distintas. Para tomar el lado opuesto solo debemos determinar la altura del rectángulo, es decir, en qué línea estarán los otros dos vértices, y eso lo podemos hacer de 2017 maneras distintas. Como esto lo podíamos hacer para cualquiera de las 2018 líneas de la cuadrícula, nos hace falta multiplicar por 2018, pero debemos tener cuidado porque estamos contando doble cada rectángulo, pues lo contamos al elegir primero el lado inferior y al elegir primero el lado superior, así que en total hay $\binom{2018}{2} \times 2017 \times 1009$.

Problema C4. Un código *mexica* es una sucesión de ceros y unos que no tiene tres o más dígitos iguales consecutivos. Por ejemplo, 010011010110 y 11001100 son códigos mexicas, mientras que 001111010 no lo es. ¿Cuántos códigos mexicas hay con 12 dígitos en los cuales hay más unos que ceros?

Solución.

Problema A1. Sea f_i el i-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Demuestra que

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Solución (por Abigail Miranda). La prueba será recursiva. Consideremos la ecuación

$$1 + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n.$$

Como $1 = f_1 = f2$, sustituímos en la ecuación y tenemos:

$$f_2 + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n,$$

Sabemo que $f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$, entonces $f_2 + f_1 = f_3$, así que la ecuación se reduce a $f_3+f_2+f_3+\ldots+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n$, aplicando lo mismo tenemos $f_4+f_3+\ldots+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n$ y así recursivamente hasta llegar a $f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n = f_n + f_{n-1} + f_n$ y más aún $f_n + f_{n-1} + f_n = f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$. En conclusión

$$1 + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n = f_{n+2}.$$

Problema A2. Si se sabe que dos de los números $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{b+c}$ y $\frac{c}{c+a}$ son $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$. ¿Cuánto vale el tercero?

Solución. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{a}{a+b} = \frac{2}{3}$ y $\frac{b}{b+c} = \frac{4}{5}$. De la primera ecuación, al despejar, obtenemos que $3a = 2a + 2b$, lo que implica que $a = 2b$. De la segunda ecuación despejamos para obtener que $5b = 4b + 4c$, de donde tenemos que $b = 4c$ y sustiuyendo en lo obtenemido antes $a = 2b = 2 \cdot 4c = 8c$. Sustituyendo esto en la tercera fracción $\frac{c}{c+a} = \frac{c}{c+8c} = \frac{c}{9c} = \frac{1}{9}$.

Problema A3. Dada la sucesión:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1+a_1}, a_3 = \frac{1}{1+a_2}, a_4 = \frac{1}{1+a_3}, \ldots$$

Determina el producto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{15}$, es decir, la multiplicación de los primeros 15 términos.

Solución. Notemos que si $a_i = \frac{a}{b}$, entonces $a_{i+1} = \frac{1}{1+\frac{a}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{b}} = \frac{b}{b+a}$, es decir, el numerador de a_{i+1} es el denominador de a_i, y el denominador de a_{i+1} es la suma del numerador y el denominador de a_i. Como la sucesión empieza en 1, los numeradores forman la sucesión de Fibonacci. Además como el numerador de a_{i+1} es el denominador de a_i, al hacer el producto de los 15 términos se irán eliminando, excepto el numerador de $a_1 = 1$ y el denominador de a_15, que será 987 (que es el término 16 de la sucesión de Fibonacci). Luego, el producto es $\frac{1}{987}$.

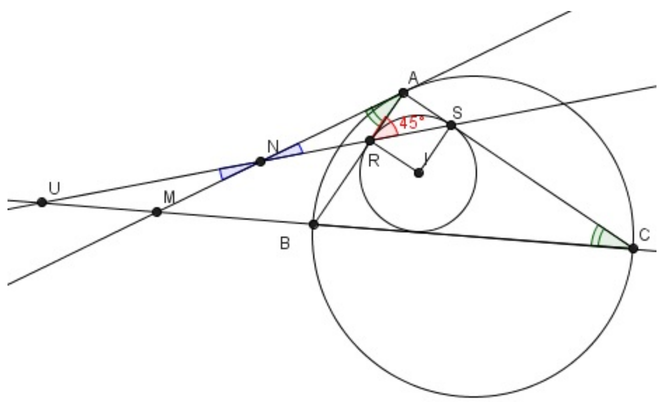
$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{13}{21} \cdot \frac{21}{34} \cdot \frac{34}{55} \cdot \frac{55}{89} \cdot \frac{89}{144} \cdot \frac{144}{233} \cdot \frac{233}{377} \cdot \frac{377}{610} \cdot \frac{610}{987}.$$

Problema A4. Juan tiene un terreno cuadrado de lados enteros donde construyó una alberca cuadrada también de lados enteros. Encuentra todas las posibles medidas del terreno y de la alberca para que le queden $1089m^2$ para sembrar pasto.

Solución. Sea a^2 el área del terreno y b^2 el área de la alberca. Buscamos entonces que $a^2 - b^2 = 1089$. O bien $(a + b)(a - b) = 1089$. Como son enteros positivos, $a + b > a - b$. Notemos que $1089 = 3^2 \cdot 11^2$, y por lo tanto, sus divisores son 1, 3, 9, 11, 33, 99, 121, 363, 1089. Tenemos 5 opciones posibles: i) $a + b = 1089, a - b = 1$, ii) $a + b = 363, a - b = 3$, iii) $a + b = 121, a - b = 9$, iv) $a + b = 99, a - b = 11$ y v) $a + b = 33, a - b = 33$. La última opción no se puede pues $a + b > a - b$. Resolviendo los sistemas de ecuaciones anteriores tenemos las soluciones $a = 545, b = 544$, $a = 183, b = 180$, $a = 65, b = 56$, $a = 55, b = 44$.

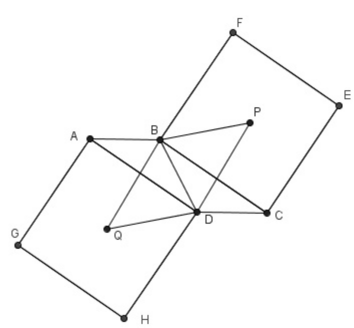
Problema G1. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. La tangente a su circuncírculo en A corta a BC en M. Además el incirculo toca a AC en S y a AB en R. La recta RS corta a AM en N y a CM en U. Muestra que $MN = MU$.

Solución. Notemos que $\alpha = \angle ACB = \angle NAR$ pues son un ángulo inscrito y uno semi-inscrito que comprenden el mismo arco. Llamemos β a $\angle RNA = \angle MNU$. Sea I el incentro de ABC. Como R y S son los puntos de tangencia del incírculo con los lados del triángulo, entonces $\angle ARI = 90^\circ = \angle ASI$, por lo tanto $ARIS$ es un cuadrado y $\angle ARS = 45^\circ$. Como es un ángulo exterior de $\triangle ARN$, entonces $\alpha + \beta = 45^\circ$. Por otro lado, como tienen un ángulo α y uno común, $\triangle ABM \simeq \triangle CAM$, y por lo tanto $\angle ABM = \angle CAM = 90^\circ + \alpha$. En $\triangle URB$, veamos que $\angle URB = \angle ARS = 45^\circ$ y además $\angle RBU = 90^\circ + \alpha$, por lo tanto, para que la suma sea 180° se tiene que $\angle RUB + \alpha = 45^\circ$, es decir, $\angle RUB = \beta$, de donde se concluye que $\triangle MUN$ es isósceles y por lo tanto $MU = MN$.



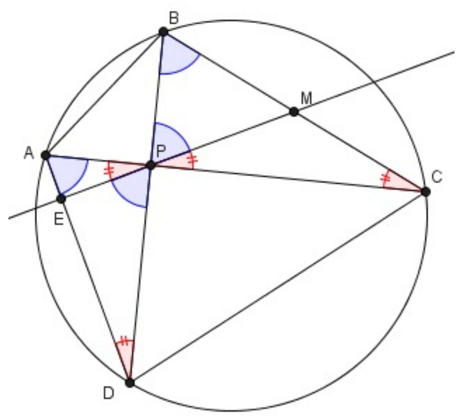
Problema G2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con $BC > AB$. Sobre los lados BC y AD se trazan cuadrados por fuera del paralelogramo y sean P y Q los centros de dichos cuadrados. Demostrar que $BPDQ$ también es paralelogramo.

Solución. Sobre los lados opuestos del paralelogramo se dibujaron cuadrados, y por ser medias diagonales de cuadrados iguales $BP = DQ$. Además $\angle PBC = 45^\circ \angle QDA$. Como BC es paralela a AD, entonces $\angle CBD = \angle ADB$. Finalmente, como BD es común en los triángulos PBD y QDB, por criterio LAL de congruencia de triángulos, tenemos que son congruentes y por lo tanto $BQDP$ es un paralelogramo.



Problema G3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con sus diagonales perpendiculares, la recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y es perpendicular a un lado, biseca al lado opuesto.

Solución. Sea P la intersección de las diagonales y E sobre AD tal que EP es perpendicular a AD. Sea M la interesección de EP con BC. Debemos demostrar que M es el punto medio de BC. Sea $\alpha = \angle CAD$. Por el cuadrilátero cíclico tenemos que $\angle CBD = \alpha$. Sea además $\beta = \angle ADB$. Notemos que $\alpha + \beta = 90°$. Entonces, como PE es perpendiculara a AD, tenemos que $\angle APE = \beta$, y por ser opuestos por el vértice $\angle MPC = \beta$, pero además, por el cuadrilátero cíclico, $\angle BCA = \angle BDA = \beta$, por lo tanto $\triangle PMC$ es isósceles y $MC = MP$. Por otro lado, $\angle EPD = \alpha$, para que con $\angle APE$ sume $180°$. Por ser opuestos por el vértice $\angle BPM = \beta$, con lo que se concluye que $\triangle BMP$ también es isósceles y entonces $BM = MP = MC$, es decir, M es el punto medio de BC.



Problema G4. Se tienen cinco puntos en el plano entre los cuales no hay tres colineales. Prueba que cuatro de ellos son los vértices de un cuadrilátero convexo.

Solución. Unamos los cinco puntos y observemos la figura que contiene en su interior o en sus lados a los cinco puntos (esta construcción se llama *envolvente convexa*), tenemos 3 casos: Es un pentágono; es un cuadrilátero; es un triángulo. En el primer caso, basta tomar cualesquiera 4 puntos de ellos y forman un cuadrilátero convexo. En el segundo caso, tomamos los 4 puntos que forman el cuadrilátero que cubre al quinto punto, estos forman el cuadrilátero convexo buscado, solo nos falta ver el tercer caso. Como no hay tres puntos colineales, en el caso del triángulo, tenemos que los otros dos puntos están en el interior del triángulo, digamos A y B. La recta que une a A y B divide al plano en dos, y como están en el interior del triángulo, no pueden estar los 3 vértices en un mismo lado, por lo tanto hay un lado con dos de los vértices, digamos C y D, entonces $ABCD$ es el cuadrilátero convexo buscado, demostremos esto por contradicción. Si estos cuatro puntos no formaran un cuadrilátero convexo quiere decir que tres de ellos forman un triángulo con el cuarto punto dentro de él. El punto dentro de este nuevo triángulo no podría ser A ni B porque eso quiere decir que la recta que une A y B dejaba a C y D en lados distintos del plano y eso no era cierto. El punto dentro de este nuevo triángulo no puede ser tampoco C ni D porque eso quiere decir que no habrían sido vértices del triángulo más grande, por lo tanto $ABCD$ debe ser el cuadrilátero convexo.