Tarea 1 de Teoría de Números I

M. en C. Jesús Rodríguez Viorato

Entregar: 30 de Agosto de 2010

1. (1 pts) Prueba las siguientes dos identidades usando inducción.

$$\begin{aligned} a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n &= a\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \\ 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) &= (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

2. (2 pt)

   a) Demuestra que para toda $n \geq 1$,

   $$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdots (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$$

   b) Usa el inciso a para probar la desigualdad $2^n n! \leq (2n)!$.

3. (1 pt) Considera la sucesión definida como $a_1 = 11$, $a_2 = 21$ y $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Demuestra que para todo $n \geq 1$ se cumple la identidad:

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1$$

4. (2 pt). Demuestra, usando inducción, que para todo par de números x, y se tiene la siguiente identidad para $n \geq 1$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

5. (1 pt) Demuestra la siguiente identidad:

$$\binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{2n}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

6. (1 pt)Demuestra las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} &= 2^n \\ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} &= 0 \end{aligned}$$

7. (2 pt) Demuestra la identidad:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$