

Tarea 4 de Teoría de Números

M. en C. Jesús Rodríguez Viorato

Entrega: Lunes, 22 de Noviembre de 2010

1. Demuestra las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $m|n$ entonces $a \equiv b \pmod{m}$.
- (b) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y c es un entero positivo, entonces $ca \equiv cb \pmod{cm}$.
- (c) Si $a \equiv b \pmod{m}$ y los enteros a , b y m son múltiplos de $d > 0$, entonces

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}.$$

- 2. Demuestra que si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $(a, m) = (b, m)$.
- 3. Da un ejemplo donde $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$ pero $a \not\equiv b \pmod{m}$.
- 4. Encuentra el residuo de 41^{65} y 2^{50} al dividirse entre 7.
- 5. Demuestre que si $a \equiv b \pmod{m_1}$ y $a \equiv b \pmod{m_2}$ entonces $a \equiv b \pmod{m}$ donde $m = (m_1, m_2)$.
- 6. (2 puntos) Usa la teoría de congruencias para demostrar que:
 - $13|3^{n+2} + 4^{2n+1}$
 - $27|2^{5n+1} + 5^{n+2}$

Definición. Un sistema completo de residuos módulo m , es un conjunto de m números enteros no congruentes por pares.

- 7. Considere un entero N en expansión decimal $N = a_k 10^k + \dots + a_1 10 + a_0$. Demuestra que 6 divide a N si y sólo si 6 divide a $M = a_0 + 4a_1 + 4a_2 + \dots + 4a_k$.

8. Resuelve cada una de las siguientes congruencias lineales.

(a) $36x \equiv 8 \pmod{102}$

(b) $34x \equiv 60 \pmod{98}$

9. Encuentra el entero más pequeño $a > 2$ tal que:

$$2|a, 3|a+1, 4|a+2, 5|a+3 \text{ y } 6|a+4.$$

10. (2 puntos) *Brahmagupta, 7mo siglo A.C.*. Cuando de una canasta de huevos se remueven de 2, 3, 4, 5 o 6 huevos a la vez, sobran repectivamente 1, 2, 3, 4 y 5 huevos. Por ejemplo, si se quitan de 4 en cuatro sobran 3 huevos. Además, si se quitaran de 7 en 7 no sobran. Encuentra la mínima cantidad de huevos que podría haber en la canasta.