$$\lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor < \lfloor x^3 \rfloor < \ldots < \lfloor x^n \rfloor < \lfloor x^{n+1} \rfloor$$

Es evidente que no puede ser menor a 1, igual a 0 y menor que 1 tampoco así que trataremos de ver que sucede con esta función.

Entonces notamos que $\lfloor x \rfloor \geq 1$ y algo que notamos es que $\lfloor x^2 \rfloor \geq 2$

Y de ahí después $\lfloor x^3 \rfloor \geq 3$ y este proceso podemos hacerlo hasta que llegamos a que:

$$\lfloor x^n \rfloor \geq n$$

Y algo que sabemos de la función parte entera $x^n \geq \lfloor x^n \rfloor \geq n$

Entonces $x^n \geq n$

De ahí notamos entonces que es inútil probar 1, para 2

$$x \geq \sqrt{2}$$

Si x=$\sqrt{2}$

Entonces notamos que $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$

Por lo tanto $\lfloor \sqrt{8} \rfloor = \lfloor 2 \rfloor$

Y llegamos a una contradicción.

Ahora

$$\sqrt[3]{3} > x > \sqrt{2}$$

Si $x < \sqrt[3]{3}$

$$x^2 < \sqrt[3]{9} < 3$$

Después sabemos que $x^2 > 2$ por lo tanto la función piso de cualquier x^2 con x menor que $\sqrt[3]{3}$ es 2

Pero la raíz cubica de $x^3 < 3$

Entonces la función piso de x^3con x menor que $\sqrt[3]{3}$ también será menor o igual que 2

Después si x $\geq \sqrt[3]{3}$

Tomemos $x = \sqrt[3]{3}$

Como ya vimos, si cumple la hipótesis cumple: $x^n \geq n$

Por lo tanto, probemos que $\sqrt[3]{3}^n \geq n$

Para n=k

$$Hipotesis: \sqrt[3]{3}^k \geq k$$

$$P.D: \sqrt[3]{3}^{k+1} \geq k+1$$

Multiplicamos la hipótesis por raíz cubica de tres y nos sale que:

$$\sqrt[3]{3}^{k+1} \geq \sqrt[3]{3}k$$

Después notamos que:

Hipotesis $\sqrt[3]{3}l \geq l+1$

P.D $\sqrt[3]{3}l + \sqrt[3]{3} \geq l+2$

Y como por hipótesis $\sqrt[3]{3}l \geq l+1$ y sabemos que $\sqrt[3]{3} \geq 1$ entonces se cumple la desigualdad.

Entonces llegamos a que $\sqrt[3]{3}^n \geq n$

Por lo tanto $\sqrt[3]{3}$ es la menor que cumple