XXV Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Examen Selectivo

2 de octubre de 2011

1. Un maestro de matemáticas avisa a sus alumnos que preguntará la demostración de tres de los ocho teoremas vistos en clase en el examen del siguiente día. De estos tres teoremas se podrá elegir cual demostrar.

   a) Un alumno decide estudiar solamente cuatro de los teoremas. ¿En cuántos casos al menos uno de estos aparecerá en el examen?

   b) ¿Cuál es el menor número de teoremas que un estudiante debe aprender para asegurar que será capaz de demostrar alguno en el examen?

2. En un condominio serán construidas seis casas de un mismo lado de una calle. Las casas pueden ser de ladrillo o de madera, pero como medida de seguridad contra incendios, dos casas de madera no pueden ser vecinas. ¿De cuántas formas se puede planear la construcción de las casas de este condominio?

3. Se tienen 60 cajas numeradas del 1 al 60 y 60 pelotas numeradas del 1 al 60.

   a) ¿De cuántas formas se puede colocar exactamente una pelota en cada caja de manera que en cada caja cuyo número sea múltiplo de 3 quede una pelota cuyo número también es múltiplo de 3?

   b) ¿De cuántas formas se puede colocar exactamente una pelota en cada caja de manera que en cada caja cuyo número sea múltiplo de 3 quede una pelota cuyo número también es múltiplo de 3 y que en cada caja cuyo número sea par quede una pelota cuyo número también es par?

4. A un conjunto C se le llama *cotorro* si la suma de sus elementos es un múltiplo de 5. Por ejemplo, el conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es un conjunto *cotorro*. ¿Cuántos conjuntos *cotorros* de 31 elementos hay si cada uno de estos toma un valor entre 1 y 35?

5. Encuentra todos los números naturales n para los cuales es posible dividir un triángulo equilátero en n triángulos equiláteros (no necesariamente del mismo tamaño).

6. Se tienen 51 hormigas dentro de un cuadrado de lado 1. Demuestra que en cualquier momento es posible encerrar tres hormigas dentro de un círculo de radio $\frac{1}{5}$.

7. Demuestra que si se eligen 10 números naturales distintos entre 1 y 15 inclusive, se habrán seleccionado dos números a, b tales que $ab+1$ o $4ab+1$ es un cuadrado perfecto.

XXV Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Examen Selectivo (Solución)

2 de octubre de 2011

1. Un maestro de matemáticas avisa a sus alumnos que preguntará la demostración de tres de los ocho teoremas vistos en clase en el examen del siguiente día. De estos tres teoremas se podrá elegir cual demostrar.

   a) Un alumno decide estudiar solamente cuatro de los teoremas. ¿En cuántos casos al menos uno de estos aparecerá en el examen?

   b) ¿Cuál es el menor número de teoremas que un estudiante debe aprender para asegurar que será capaz de demostrar alguno en el examen?

   Solución:

   a) Este problema puede resolverse utilizando la regla del complemento, es decir, restando los casos en los que no aparece alguno de los problemas que estudió del total de casos.
   El total de casos formas de elegir los teoremas que aparecerán en el examen es $\binom{8}{3} = 56$. Luego, el número de exámenes en los que no aparece alguno de los teoremas que estudió es $\binom{4}{3} = 4$.
   Entonces, aparecerá al menos un teorema de los que estudió en $56 - 4 = 52$ casos.

   b) Si un alumno aprende 6 de los 8 teoremas, entonces desconoce 2 de los 8. Como aparecen 3 teoremas, forzosamente aparecerá uno de los que aprendión. Si sólo aprendiera 5, podría ocurrir que aparezcan los 3 que no conoce.

2. En un condominio serán construidas seis casas de un mismo lado de una calle. Las casas pueden ser de ladrillo o de madera, pero como medida de seguridad contra incendios, dos casas de madera no pueden ser vecinas. ¿De cuántas formas se puede planear la construcción de las casas de este condominio?

   Solución:

   Como únicamente nos interesa la distribución de las casas y no la forma de cada casa, podemos ver este problema como las maneras de ordenar k pelotas blancas idénticas y $6 - k$ pelotas negras idénticas de manera que no haya 2 pelotas blancas juntas, donde k puede ser un entero desde 0 hasta 6.
   Obsérvese que si $k > 3$, forzosamente habrán 2 pelotas blancas juntas.
   Ahora, para k entre 0 y 3, colóquense primero las 6-k pelotas negras. Para que las pelotas blancas no estén juntas, estas deben colocarse ya sea en los espacios al inicio o al final de la fila, o entre un par de pelotas negras. Entonces se deben elegir k de estos $6 - k + 1$ espacios, lo cual se realiza de $\binom{6-k+1}{k}$ formas.

Podemos resolver cada caso de forma independiente y después sumar los resultados:

- $k = 0$: $\binom{7}{0} = 1$ formas.
- $k = 1$: $\binom{6}{1} = 6$ formas.
- $k = 2$: $\binom{5}{2} = 10$ formas.
- $k = 3$: $\binom{4}{3} = 4$ formas.

El total de formas es entonces $1 + 6 + 10 + 4 = 21$.

3. Se tienen 60 cajas numeradas del 1 al 60 y 60 pelotas numeradas del 1 al 60.

   a) ¿De cuántas formas se puede colocar exactamente una pelota en cada caja de manera que en cada caja cuyo número sea múltiplo de 3 quede una pelota cuyo número también es múltiplo de 3?

   b) ¿De cuántas formas se puede colocar exactamente una pelota en cada caja de manera que en cada caja cuyo número sea múltiplo de 3 quede una pelota cuyo número también es múltiplo de 3 y que en cada caja cuyo número sea par quede una pelota cuyo número también es par?

   Solución:

   a) Hay en total 20 múltiplos de 3 entre el 1 y el 60. Las 20 pelotas múltiplo de 3 pueden colocarse en sus cajas correspondientes de 20! formas. Luego, las 40 pelotas restantes pueden acomodarse de 40! formas. Entonces hay $20! \times 40!$ formas de poner una pelota en cada caja de tal manera que se cumpla la condición.

   b) Obsérvese que hay pelotas que son tanto múltiplo de 2 como de 3. Entonces éstas deben quedar colocadas en una caja que sea también múltiplo de 2 y 3.
   Hay en total 10 pelotas múltiplo de 2 y 3, 10 que son múltiplo de 3 pero no de 2, 20 que son múltiplo de 2 pero no de 3, y 20 que no son múltiplo ni de 2 ni de 3, las cuales pueden acomodarse de 10!, 10!, 20! y 20! formas respectivamente. Entonces hay $10! \times 10! \times 20! \times 20!$ formas de poner una pelota en cada caja de tal manera que se cumpla la condición.

4. A un conjunto C se le llama *cotorro* si la suma de sus elementos es un múltiplo de 5. Por ejemplo, el conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es un conjunto *cotorro*. ¿Cuántos conjuntos *cotorros* de 31 elementos hay si cada uno de estos toma un valor entre 1 y 35?

   Solución:

   La suma de los números del 1 al 35 es $\frac{15\times16}{2} = 120$, la cual es múltiplo de 5. Entonces, para que un conjunto C de 31 elementos entre 1 y 35 sea cotorro, es necesario que los 4 números que no pertenecen a él tengan suma múltiplo de

5. Así, en lugar de elegir a los números que estarán en el conjunto se eligen los que no estarán en el conjunto.
Considérense las congruencias módulo 5 de los 35 números. En total se tienen 7 números por cada congruencia.
Dividamos en casos según el número de números múltiplo de 5 elegidos:

- 4 múltiplos de 5:
  Claramente la suma es múltiplo de 5, por lo que el conjunto será cotorro. En este caso hay $\binom{7}{4} = 35$ conjuntos cotorros.
- 3 múltiplos de 5:
  Sin importar cual sea la congruencia del otro número, la suma de los 4 no será múltiplo de 5. En este caso hay 0 conjuntos cotorros.
- 2 múltiplos de 5:
  La suma será múltiplo de 5 únicamente si se eligen un número de las congruencias 1 y 4, o un número de las congruencias 2 y 3. En este caso hay $\binom{7}{1}^2 + \binom{7}{1}^2 = 7^2 + 7^2 = 98$ conjuntos cotorros.
- 1 múltiplo de 5:
  La suma será múltiplo de 5 únicamente si se eligen dos números con congruencia 1 y un número de congruencia 3, un número de congruencia 1 y dos de congruencia 2, o dos de congruencia 3 y uno de congruencia 4. En este caso hay $\binom{7}{2}\binom{7}{1} + \binom{7}{1}\binom{7}{2} + \binom{7}{2}\binom{7}{1} = 3\binom{7}{2}\binom{7}{1} = 3 \times 21 \times 7 = 441$ conjuntos cotorros.
- 0 múltiplos de 5:
  La suma será múltiplo de 5 únicamente si se eligen dos números de las congruencias 1 y 4, dos números de las congruencias 2 y 3, o un número de cada una de las congruencias. En este caso hay $\binom{7}{2}^2 + \binom{7}{2}^2 + \binom{7}{1}^4 = 21^2 + 21^2 + 7^4 = 441 + 441 + 2401 = 3283$ conjuntos cotorros.

Por lo tanto hay en total $35 + 98 + 441 + 3283 = 3857$ conjuntos cotorros de 31 elementos con valores entre 1 y 35.

5. Encuentra todos los números naturales n para los cuales es posible dividir un triángulo equilátero en n triángulos equiláteros (no necesariamente del mismo tamaño).

   Solución:

   Es claro que el triángulo puede dividirse en 1 triángulo equilátero, es decir, el mismo.
   Es fácil dar una manera de dividir al triángulo equilátero en 4, 6 y 8 triángulos equiláteros.
   Obsérvese que si el triángulo equilátero está dividido en k triángulos equiláteros, si se divide uno de estos en 4 triángulos equiláteros, el triángulo original quedará dividido en $k + 3$ triángulos equiláteros.
   De esta forma, a partir de la división en 4 triángulos podemos llegar a la de 7 triángulos, y a partir de esta a la de 10, y así sucesivamente.

Por lo tanto, el triángulo puede dividirse en n triángulos equiláteros si n es de la forma $3k + 1$, para $k \geq 0$.
Análogamente, a partir de la división en 6 y 8 triángulos equiláteros, se muestra que el triángulo puede dividirse en n triángulos equiláteros para n de la forma $3k$ para $k \geq 2$, y $3k + 2$ para $k \geq 2$, respectivamente.
Si $n = 2$, por el principio de las casillas uno de los triángulos debe contener dos de los ángulos del triángulo original. Como este triángulo es equilátero, también debe contener al otro ángulo. Entonces no puede dividirse en 2 triángulos.
Si $n = 3$, cada triángulo debe contener a uno de los ángulos del triángulo original. Si dos de los triángulos tienen un vértice común, el ángulo entre sus lados es de 60^{o}, por lo que se necesitará otro tríangulo que lo contenga. Si dos triángulos no tienen un vértice común, cada uno genera genera un ángulo de 120^{o} con el lado del triángulo original, el cual necesita 2 triángulos equiláteros para cubrirse. Entonces no puede dividirse en 3 triángulos.
Siguiendo un argumento similar a los anteriores se puede mostrar que para $n = 5$ tampoco es posible.
Por lo tanto el triángulo puede dividirse para $n = 1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$.

6. Se tienen 51 hormigas dentro de un cuadrado de lado 1. Demuestra que en cualquier momento es posible encerrar tres hormigas dentro de un círculo de radio $\frac{1}{5}$.

   Solución:

   Divídase el cuadrado de lado 1 en 25 cuadritos de lado $\frac{1}{5}$. Así, por el principio de las casillas hay un cuadrito que contiene al menos a 3 de las 51 hormigas. Luego, utilizando el teorema de Pitágoras se tiene que la diagonal de un cuadrito de lado $\frac{1}{5}$ es $\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Entonces, el radio del círculo que pasa por los cuatro vértices del cuadrito tiene radio $\frac{1}{5\sqrt{2}}$. Esto quiere decir que en cualquier momento hay 3 hormigas que se pueden encerrar en un círculo de radio $\frac{1}{5\sqrt{2}}$.
   Como $\frac{1}{5} > \frac{1}{5\sqrt{2}}$, el círculo con centro en el centro del cuadrito de lado $\frac{1}{5}$ contiene completamente al círculo circunscrito a este cuadrito, por lo que también encierra a las 3 hormigas.

7. Demuestra que si se eligen 10 números naturales distintos entre 1 y 15 inclusive, se habrán seleccionado dos números a, b tales que $ab+1$ o $4ab+1$ es un cuadrado perfecto.

   Solución:

   Obsérvese que si $ab+1 = k^2$ para algún k, entonces $ab = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, de donde $a = k - 1$ y $b = k + 1$ o viceversa.
   Para aprovechar este hecho, podemos dividir a los 15 números en las siguientes ternas:
   $$(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 12), (13, 14, 15)$$
   Al elegir 10 de los 15 números posibles, siempre se eligen al menos dos de la misma terna. Supóngase que la terna en la que se seleccionan dichos dos números

es la terna $(n-1, n, n+1)$.
Tenemos tres casos:

- Si se seleccionan $n-1$ y $n+1$, entonces $(n-1)(n+1)+1 = n^2-1+1 = n^2$, de donde $(n-1)(n+1)+1$ es un cuadrado perfecto.
- Si se seleccionan $n-1$ y n, entonces $4(n-1)n+1 = 4n^2-4n+1 = (2n-1)^2$, de donde $4(n-1)n+1$ es un cuadrado perfecto.
- Si se seleccionan n y $n+1$, se procede igual que en el caso anterior para probar que $4n(n+1)+1$ es un cuadrado perfecto.

Por lo tanto siempre se eligen dos números que satisfacen lo pedido.