

*Miércoles 7 de julio de 2010*

Problema 1. Determine todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$. ($\lfloor z \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que z .)

Problema 2. Sea ABC un triángulo, I su incentro y Γ su circunferencia circunscrita. La recta AI corta de nuevo a Γ en D . Sean E un punto en el arco $\widehat{BDC}$ y F un punto en el lado BC tales que

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Sea G el punto medio del segmento IF . Demuestre que las rectas DG y EI se cortan sobre Γ .

Problema 3. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in \mathbb{N}$.



Jueves 8 de julio de 2010

Problema 4. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y P un punto en el interior del triángulo. Las rectas AP , BP y CP cortan de nuevo a Γ en los puntos K , L y M , respectivamente. La recta tangente a Γ en C corta a la recta AB en S . Si se tiene que $SC = SP$, demuestre que $MK = ML$.

Problema 5. En cada una de las seis cajas $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:

Tipo 1: Elegir una caja no vacía B_j , con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1} .

Tipo 2: Elegir una caja no vacía B_k , con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1} y B_{k+2} .

Determine si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas. (Observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Problema 6. Sea $a_1, a_2, a_3, \dots$ una sucesión de números reales positivos. Se tiene que para algún entero positivo s ,

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \text{ tal que } 1 \leq k \leq n-1\}$$

para todo $n > s$. Demuestre que existen enteros positivos ℓ y N , con $\ell \leq s$, tales que $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ para todo $n \geq N$.