Lunes, 18 de julio de 2011

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ por s_A. Sea n_A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales $a_i + a_j$ divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

Problema 2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta ℓ que pasa por un único punto P de $\mathcal{S}$. Se rota ℓ en el sentido de las manecillas del reloj con centro en P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentre otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente.
Demostrar que se puede elegir un punto P de $\mathcal{S}$ y una recta ℓ que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación un número infinito de veces.

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todo par de números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos