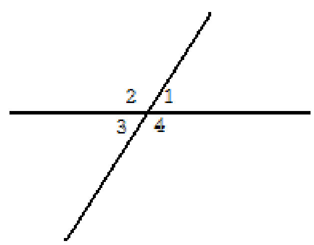
Geometría

Ángulos

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Introducción

Cuando dos lineas rectas se cortan forman cuatro ángulos entre ellas:

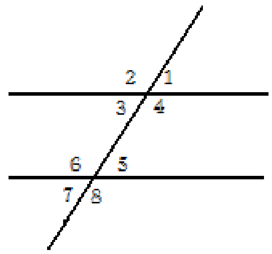


Estos cuatro ángulos tienen además la característica de ser iguales por parejas: $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ y $\measuredangle 2 = \measuredangle 4$. Dichas parejas de ángulos se suelen llamar "opuestos por un vértice". Además, observemos que si tomamos un ángulo de cada pareja entre ambos forman una línea recta, esto es, un ángulo de 180°. Es decir, $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 180°$, $\measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 180°$ etc.

2. Ángulos entre paralelas

Dos líneas l_1 y l_2 son paralelas si por mucho que las extendamos estas nunca se cortan. Denotaremos esta situación mediante $l_1 \| l_2$. Ahora bien, si a dos líneas paralelas las cortamos con una transversal obtenemos ocho ángulos:

Ya sabemos que, por ángulos opuestos por un vértice, $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$, $\measuredangle 2 = \measuredangle 4$, $\measuredangle 5 = \measuredangle 7$ y $\measuredangle 6 = \measuredangle 8$. Sin embargo, la característica $l_1 \| l_2$ hace que además $\measuredangle 1 = \measuredangle 3 = \measuredangle 5 = \measuredangle 7$ y $\measuredangle 2 = \measuredangle 4 = \measuredangle 6 = \measuredangle 8$. Estas igualdades suelen ser llamadas "ángulos entre

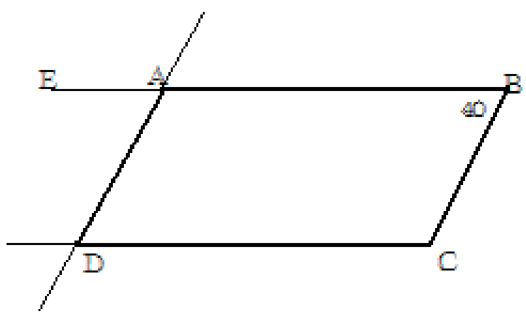


paralelas"y son de gran utilidad ya que nos permiten "transportar"ángulos en una figura.

Ejemplo: En un paralelogramo $ABCD$, (un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son paralelos) se sabe que $\measuredangle ABC = 40°$ ¿Cuánto vale el ángulo $\measuredangle CDA$?

Nota para el entrenador: Es un buen momento para explicar la notación $\measuredangle ABC$ así como el hecho de que los vértices de un polígono se nombran en el sentido de las manecillas del reloj.

Solución: Extendamos algunas de las líneas del paralelogramo un poco para verlas mejor y coloquemos un punto E en la extensión de AB:



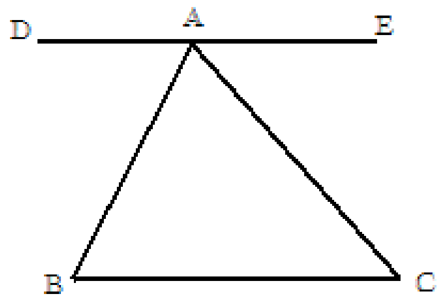
Usando ángulos entre las paralelas AD y BC vemos que $\measuredangle EAD = \measuredangle ABC$, así que $\measuredangle EAD$ también mide 40°. De la misma manera, utilizando ahora $AB \| DC$ obtenemos $\measuredangle EAD = \measuredangle ADC$. Por lo tanto, $\measuredangle ADC = \mathbf{40°}$

También podemos ver, de la misma manera, que $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = 140°$. Además como podemos realizar el mismo proceso empezando con cualquier valor del ángulo $\measuredangle ABC$ lo que hemos demostrado es que en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales y los ángulos adyacentes suman 180°.

Los ángulos entre paralelas nos permiten también demostrar el siguiente hecho:

Teorema: Los ángulos internos de un triángulo suman $180°$.

Demostración: Consideremos un triángulo ABC cualquiera. Trazamos por el vértice A una paralela al lado BC y colocamos puntos D y E sobre dicha paralela:



Luego, por ángulos entre paralelas, $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC$ y $\measuredangle CAE = \measuredangle ACB$. Observemos que los tres ángulos alrededor del vértice A conforman una línea recta, es decir $\measuredangle BAD + \measuredangle BAC + \measuredangle CAE = 180°$, pero entonces, usando las igualdades anteriores, nos queda $\measuredangle ABC + \measuredangle BAC + \measuredangle ACB = 180°$.

Ejemplo: ¿Cuánto suman los ángulos de cualquier cuadrilátero?

Solución: Si trazamos cualquiera de las diagonales del cuadrilátero, éste nos queda dividido en dos triángulos. Como la suma de los ángulos de cada triángulo es $180°$ y entre los seis ángulos de los triángulos se cubren los cuatro ángulos del cuadrilátero la suma de los ángulos del cuadrilátero es $180° + 180° = \mathbf{360}°$.

El proceso anterior puede continuarse: ¿Cuánto suman los ángulos de un pentágono? Si elejimos cualquier vértice y trazamos las dos diagonales desde ese vértice el pentágono nos queda dividido en tres triángulos, así que la suma de los ángulos del pentágono es $3 \times 180° = 540°$. ¿Y la suma de los ángulos de un n-ágono (polígono de n lados)? Elijiendo cualquier vértice y trazando todas las diagonales desde allí el n-ágono nos queda dividido en $n-2$ triángulos, de manera que la suma de los ángulos del n-ágono es $(n-2) \times 180°$.

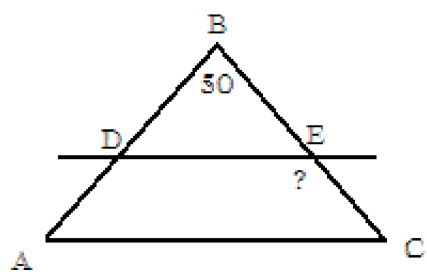
Ejemplo: ¿Cuánto vale un ángulo de un dodecágono regular (polígono de 12 lados con todos sus lados y todos sus ángulos iguales)?

Solución: De acuerdo a la fórmula anterior, la suma de los ángulos de un dodecágono regular es $10 \times 180° = 1800°$. Como todos los ángulos son iguales, cualquiera de ellos debe medir $\frac{1800°}{12} = \mathbf{150}°$

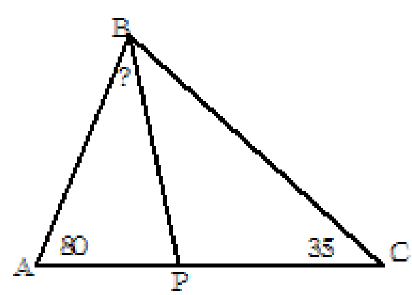
3. Problemas

Nota para el entrenador: en los problemas 1, 2, 3, 7, 8, 9 y 10 es posible dibujar la figura a partir de la información dada en el texto. Si el tiempo lo permite, es bueno dejar que los alumnos intenten hacer el dibujo por su cuenta. Para evitar ambiguedades, hemos incluido la figura en cada problema

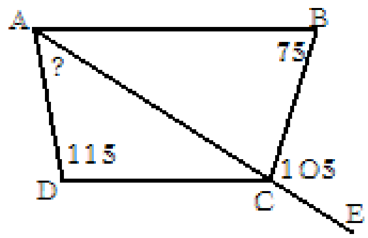
1. Sea ABC un triángulo isóceles con $AB = BC$ y $\measuredangle ABC = 50°$. Una recta paralela a AC corta a los lados AB y BC en los puntos D y E respectivamente. ¿Cuánto vale el ángulo $\measuredangle DEC$?



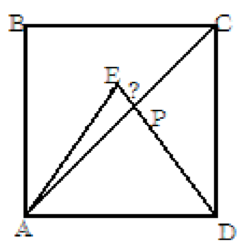
2. Sea ABC un triángulo tal que $\measuredangle BAC = 80°$ y $\measuredangle BCA = 35°$. Sea P un punto sobre el lado AC tal que $BP = PC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle PBA$?



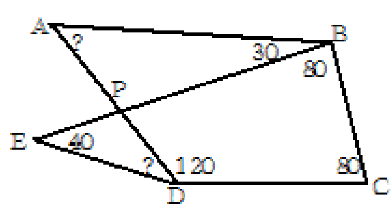
3. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \| CD$ y $AB > CD$. Sea E un punto en la prolongación de la diagonal AC de manera que C queda entre A y E. Si $\measuredangle ABC = 75°, \measuredangle BCE = 105°$ y $\measuredangle ADC = 115°$, ¿cuánto vale $\measuredangle DAC$?



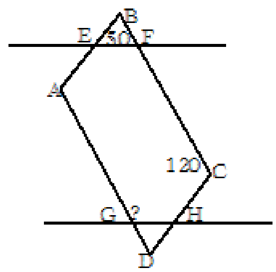
4. En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero AED dentro del cuadrado. La diagonal AC corta al lado ED en un punto P. ¿Cuánto vale el ángulo EPC?



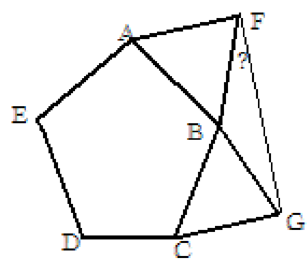
5. En la figura se muestran cuadriláteros $ABCD$ y $BCDE$ cuyos lados AD y EB se cortan en un punto P. Si $\measuredangle ABE = 30°$, $\measuredangle EBC = \measuredangle BCD = 80°$, $\measuredangle CDA = 120°$ y $\measuredangle BED = 40°$. ¿Cuánto valen los ángulos $\measuredangle PAB$ y $\measuredangle PDE$?



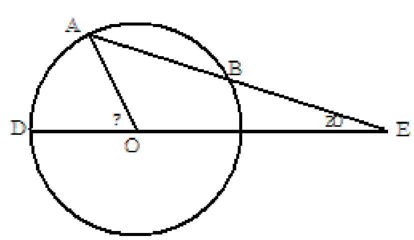
6. En la figura se muestra un paralelogramo $ABCD$ cortado por dos lineas paralelas en los puntos E, F, G y H. Si $\measuredangle BEF = 50°$ y $\measuredangle BCD = 120°$, ¿cuánto vale $\measuredangle AGH$?



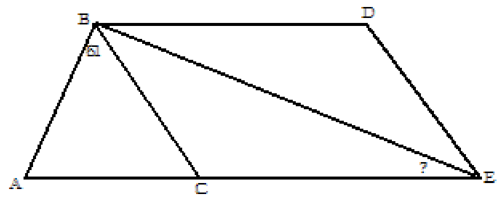
7. Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Exteriormente a él se construyen triángulos equiláteros AFB y BGC. ¿Cuánto vale el ángulo $\measuredangle BFG$?



8. Sea C un círculo con centro O, sean D y A son puntos sobre el círculo, E es un punto fuera del círculo y sobre la recta DO de manera que O queda entre D y E, y sea B la intersección de la recta AE con el círculo C. Si $\measuredangle BED = 20°$, y $BE = AO$, ¿cuánto vale $\measuredangle AOD$?

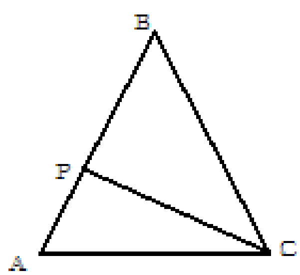


9. Sea ABC un triángulo tal que $\measuredangle ABC = 61°$. Exteriormente al triángulo ABC se construye un paralelogramo $BDEC$ con $BD \| EC$. Sabemos que el ángulo $\measuredangle EBC$ vale el doble del ángulo $\measuredangle EBD$ y el ángulo $\measuredangle BAC$ mide el doble del ángulo $\measuredangle EBC$. ¿Cuánto vale el ángulo $\measuredangle BEC$?



.

10. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = BC$. Sea P un punto en el lado AB tal que $PB = PC = AC$. ¿Cuánto vale el ángulo $\measuredangle ABC$?



4. Soluciones

1. Como el triángulo es isóceles, sabemos que $\measuredangle BAC = \measuredangle BCA$. Digamos que ambos valen α. Como los ángulos del triángulo deben sumar $180°$, obtenemos la ecuación $2\alpha + 50° = 180° \Rightarrow 2\alpha = 130° \Rightarrow \alpha = 65°$. Por lo tanto $\measuredangle BCA = 65°$. Luego por ángulos entre paralelas $\measuredangle BED$ también vale $65°$. Finalmente, como los ángulos $\measuredangle BED$ y $\measuredangle DEC$ forman una línea recta debemos tener $\measuredangle BED + \measuredangle DEC = 180° \Rightarrow \measuredangle DEC = 180° - 65° \Rightarrow \measuredangle DEC = \mathbf{115}°$.

2. Primera forma: Como tenemos $BP = PC$ el triángulo BPC es isóceles, pero esto quiere decir que $\measuredangle PBC = \measuredangle PCB$. Es decir, $\measuredangle PBC = 35°$. Ahora observemos

que la suma de ángulos del triángulo ABC es $\measuredangle BAC + \measuredangle BCA + \measuredangle PBC + \measuredangle PBA = 180°$ y sustituyendo los valores que ya conocemos nos queda $80° + 35° + 35° + \measuredangle PBA = 180°$ y finalmente restamos para obtener: $\measuredangle PBA = \mathbf{30}°$.

Segunda forma: Al igual que en la primera forma, obtenemos que $\measuredangle PBC = 35°$. Luego, nos fijamos en la suma de ángulos del triángulo BPC: $\measuredangle PBC + \measuredangle BCP + \measuredangle CPB = 180°$ y como ya sabemos dos de los tres ángulos podemos determinar que $\measuredangle CPB = 110°$. Ahora, los ángulos $\measuredangle CPB$ y $\measuredangle APB$ forman una linea recta, así que deben sumar 180°, es decir, debemos tener $\measuredangle APB = 70°$. Finalemente, notemos que en el triángulo ABP ya sabemos dos de los tres ángulos así que podemos determinar el tercero: $\measuredangle PBA = \mathbf{30}°$.

Nota para el entrenador: Después mostrar esta segunda forma de terminar es conveniente introducir la noción de ángulo exterior y recalcar el hecho de que el ángulo exterior de un triángulo vale la suma de los dos ángulos internos opuestos

3. Notemos que $\measuredangle BCE$ es un ángulo exterior al triángulo ABC. Por lo tanto, debemos tener $\measuredangle CAB + \measuredangle ABC = \measuredangle BCE$. Por lo tanto, $\measuredangle CAB = 105° - 75° = 30°$. Luego, utilizando ángulos entre las paralelas AB y DC, obtenemos que $\measuredangle ACD = \measuredangle CAB = 30°$. Finalmente, observemos que ya tenemos dos de los tres ángulos del triángulo ADC, así que podemos determinar el restante: $\measuredangle DAC = \mathbf{35}°$.

4. En lugar de encontrar $\measuredangle EPC$ determinaremos el valor de $\measuredangle APD$ pues estos dos ángulos son opuestos por un vértice y, por lo tanto, valen lo mismo. Ahora, observemos que por ser un ángulo interno de un triángulo equilátero, $\measuredangle PDA = 60°$. Por otro lado, vemos que como $ABCD$ es un cuadrado sus cuatro lados son iguales, en particular $AD = DC$, así que el triángulo ADC es isóceles y $\measuredangle CAD = \measuredangle ACD$. Además por ser $ABCD$ un cuadrado sus cuatro ángulos son rectos, en particular $\measuredangle ADC = 90°$. Entonces en el triángulo ACD debemos tener: $\measuredangle CAD + \measuredangle ACD + 90° = 180° \Rightarrow 2 \times \measuredangle CAD = 90° \Rightarrow \measuredangle CAD = 45°$. Observemos que con esto ya hemos determinado dos de los tres ángulos del triángulo APD y podemos obtener el restante: $\measuredangle APD = 75°$ y como mide lo mismo que $\measuredangle EPC$, concluímos que $\measuredangle EPC = \mathbf{75}°$

5. Primera forma: Observemos que tenemos tres de los cuatro ángulos del cuadrilátero $PBCD$. Por lo tanto podemos determinar el último mediante: $\measuredangle BPD = 360° - 80° - 80° - 120° = 80°$. Luego, $\measuredangle BPD$ es un ángulo externo al triángulo APD así que $\measuredangle PAB + \measuredangle ABP = \measuredangle BPD \Rightarrow \measuredangle PAB = 80° - 30° = \mathbf{50}°$. De la misma manera, como BPD también es ángulo exterior del triángulo PED obtenemos $\measuredangle PED = 80° - 40° = \mathbf{40}°$.

Segunda forma: Notemos que en el cuadrilátero $ABCD$ ya tenemos tres de los cuatro ángulos (aunque uno esta partido en dos, pero esto no importa) así que podemos determinar directamente: $\measuredangle PAB = 360° - 30° - 80° - 80° - 120° = \mathbf{50°}$. De la misma manera, como en el cuadrilátero $BCDE$ ya tenemos tres de los cuatro ángulos obtenemos: $\measuredangle PED = 360° - 80° - 80° - 120° - 40° = \mathbf{40°}$

6. Prolonguemos el lado AB hasta que corte a la paralela inferior en un punto I. Usando ángulos entre paralelas vemos que $\measuredangle AIG = \measuredangle BEF = 50°$. Por otro lado, por ser ángulos opuestos de un paralelogramo tenemos que $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 120°$. Luego, por formar una línea recta tenemos que $\measuredangle IAG + \measuredangle BAG = 180° \Rightarrow \measuredangle IAG = 180° - 120° = 60°$. Finalmente, $\measuredangle AGH$ es un ángulo externo del triángulo AIG y por lo tanto: $\measuredangle AGH = \measuredangle AIG + \measuredangle GAI = 50° + 60° = \mathbf{110}°$.

7. Por ser ángulo interno de un pentágono, $\measuredangle ABC = \frac{3 \times 180°}{5} = 108°$. Luego, como los ángulos $\measuredangle ABF, \measuredangle FBG, \measuredangle GBC$ y $\measuredangle ABC$ "dan la vuelta completa "alrededor del vértice B deben sumar 360° entre los cuatro. Pero ya hemos calculado $\measuredangle ABC$ mientras que $\measuredangle ABF$ y $\measuredangle GBC$ son ambos 60° pues son ángulos internos de triángulos equiláteros. Por lo tanto podemos calcular $\measuredangle FBG$ mediante: $\measuredangle FBG = 360° - 108° - 60° - 60° = 132°$. Por otro lado, como AFB y BGF son equiláteros tenemos que $FB = AB$ y $BG = BC$ y como $ABCDE$ es regular tenemos $AB = BC$. Por lo tanto $FB = BG$, así que el triángulo BFG es isóceles y $\measuredangle BFG = \measuredangle BGF$. De la misma manera que en problemas anteriores, al saber el valor de *uno* de los ángulos de un triángulo isóceles ya podemos determinar el valor de los otros dos, en particular del que nos interesa: $2 \times \measuredangle BFG = 180° - 132° \Rightarrow \measuredangle BFG = \mathbf{24}°$.

8. Tracemos la línea OB. Sabemos que BE mide lo mismo que AO, pero tanto AO como OB son radios de la circunferencia y por lo tanto deben medir lo mismo. Luego, $BE = OB$ así que el triángulo OBE es isóceles y por lo tanto $\measuredangle BOE = \measuredangle BEO = 20°$. Ahora, el ángulo $\measuredangle OBA$ es externo al triángulo OBE y por lo tanto $\measuredangle OBA = \measuredangle BOE + \measuredangle BEO = 20° + 20° = 40°$. Pero vemos que $OA = OB$, es decir, el triángulo AOB es isóceles y como ya conocemos uno de sus ángulos podemos calcular los otros dos, en particular: $\measuredangle AOB = 180° - \measuredangle OAB - \measuredangle OBA = 180° - 40° - 40° = 100°$. Finalmente, observemos que los ángulos $\measuredangle AOD, \measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOE$ completan una línea recta, y por lo tanto: $\measuredangle AOD = 180° - \measuredangle AOB - \measuredangle BOE = 180° - 100° - 20° = \mathbf{60}°$.

9. Llamémosle α al ángulo que queremos determinar: $\measuredangle BEC = \alpha$. Ahora, por ángulos entre las paralelas BD y CE, $\measuredangle DBE = \measuredangle BEC$, es decir $\measuredangle DBE = \alpha$. Utilizando las relaciones entre ángulos dadas en el enunciado del problema

vemos que $\measuredangle EBC = 2\alpha$ y $\measuredangle BAC = 4\alpha$. Observemos que el ángulo $\measuredangle BCA$ es exterior al triángulo BCE, así que: $\measuredangle BCA = \measuredangle CBE + \measuredangle BEC = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$. Luego, en el triángulo ABC tenemos $\measuredangle ABC + \measuredangle BAC + \measuredangle BCA = 180° \Rightarrow 61° + 4\alpha + 3\alpha = 180° \Rightarrow 7\alpha = 119° \Rightarrow \alpha = 17°$. Pero esto es justamente lo que queríamos determinar: $\measuredangle BEC = \mathbf{17}°$.

10. Llamémosle α al ángulo $\measuredangle BAC$ y β al que queremos determinar $\measuredangle ABC$. Como ABC es isóceles tenemos que también $\measuredangle BCA = \alpha$. Luego la suma de ángulos internos de ABC nos dice que $2\alpha + \beta = 180°$. Por otro lado, $PB = PC$ implica que el triángulo CPB es isóceles y por lo tanto $\measuredangle PCB = \measuredangle PBC = \beta$. Observemos que el ángulo $\measuredangle APC$ es externo al triángulo CPB y por lo tanto $\measuredangle APC = \measuredangle PCB + \measuredangle PBC = 2\beta$. Pero observemos que como también tenemos $AC = PC$ el triángulo APC es también isóceles y debemos tener $\measuredangle PAC = \measuredangle APC$, o en otras palabras, nos queda la igualdad $2\beta = \alpha$. Sustituyendo esta igualdad en la primera ecuación vemos que $2(2\beta) + \beta = 180° \Rightarrow 5\beta = 180° \Rightarrow \beta = 36°$. Pero esto es lo que queríamos determinar: $\measuredangle ABC = \mathbf{36}°$.