Combinatoria

Permutaciones y Combinaciones

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Introducción

Empezaremos considerando el siguiente problema: ¿de cuántas maneras diferentes podemos revolver las letras de la palabra OSA?

De acuerdo a lo visto en el entrenamiento de conteo básico vemos que para realizar una "revoltura", o permutación, debemos elegir que letra vamos a escribir primero, para lo cual tenemos tres opciones, luego elegimos que letra va en segundo lugar, para lo cual tenemos dos opciones (cualquiera menos la letra que ya colocamos en el primer lugar) y finalmente la letra que quedó va en el último lugar (una sola opción). De manera que obtenemos en total $3 \times 2 \times 1 = \mathbf{6}$ revolturas. Ahora bien, podríamos haber resuelto este problema sin conocimientos de conteo básico, simplemente escribiendo ordenadamente las posibles permutaciones. En este caso obtenemos el siguiente esquema:

- OSA
- OAS
- SOA
- SAO
- AOS
- ASO

Obteniendo así las seis revolturas totales.

Cambiemos ahora ligeramente nuestro problema: ¿de cuántas maneras diferentes podemos revolver las letras de la palabra OSO?

En principio, podríamos pensar que la respuesta es 6 al igual que en el caso anterior. Sin embargo, veamos que sucede al escribir dichas seis permutaciones según el esquema anterior:

- OSO
- OOS
- SOO
- SOO
- OOS
- OSO

Al analizar este esquema vemos que en realidad sólo tenemos tres revolturas realmente diferentes: OSO, OOS y SOO ¿Cuál es la diferencia con respecto al caso anterior? Lo que sucede es que las permutaciones OSA y ASO que eran diferentes en el caso anterior ahora se vuelven ambas OSO, de la misma manera OAS y AOS ahora son ambas OOS y también SOA y SAO son ahora indistinguibles. Es decir, cada una de las permutaciones obtenidas en el primer caso es "contada dos veces "en el segundo caso. De manera que la respuesta es, en efecto, $6 \div 2 = \mathbf{3}$.

Nota para el entrenador: Combiene aquí recordar el problema 5 del entrenamiento de conteo básico.

Volvamos a modificar ligeramente el problema: ¿de cuántas maneras diferentes podemos revolver las letras de la palabra $OSOS$?

Notemos que, usando lo visto en conteo elemental, si quisiereamos revolver las letras y todas fueran diferentes el total de permutaciones sería $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Sin embargo, notemos que de acuerdo a lo hecho anteriormente, si tuvieramos la O repetida y las otras dos letras fueran diferentes cada permutación de las 24 anteriores estaría siendo contada dos veces y entonces el total de revolturas verdaderamente diferentes sería $24 \div 2 = 12$. Finalmente, como además de tener la O repetida, tenemos la S repetida permutación de las 12 anteriores se esta también contando dos veces así que el resultado que buscamos es $12 \div 2 = \mathbf{6}$

Nota para el entrenador: Dependiendo de los alumnos, podría ser conveniente escribir las seis permutaciones que salen en el ejemplo anterior.

Finalmente, consideremos una última modificación: ¿de cuántas maneras diferentes podemos revolver las letras de la palabra $OZONO$?

Nuevamente, si tuvieramos las cinco letras diferentes, habría un total de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ permutaciones distintas. Sin embargo, al tener la O repetida tres veces, ¿cuántas veces se está contando cada permutación? La respuesta es 3! (seis veces), para verlo consideremos el siguiente esquema:

- $NZO_1O_2O_3$
- $NZO_1O_3O_2$
- $NZO_2O_1O_3$
- $NZO_2O_3O_1$
- $NZO_3O_1O_2$
- $NZO_3O_2O_1$

Estas son las seis veces que se cuenta la permutación $NZOOO$ cuando contamos como si tuvieramos las cinco letras diferentes (hemos colocado los subíndices para diferenciar las tres $O's$). Como esto es válido para cualquier permutación, concluímos que el resultado buscado es $\frac{5!}{3!} = 120 \div 6 = \mathbf{20}$

Aplicando lo que hemos hecho, ya podemos resolver cualquier problema de revoltura de letras!

Ejemplo: ¿De cuántas maneras diferentes podemos revolver las letras de la palabra $FRACASARIAMOS$?

Solución: En total son 13 letras, pero la A se repite 4 veces, la R 2 veces y la S también dos veces, por lo tanto la solución es: $\frac{13!}{4!2!2!}$.

Nota para el entrenador: Es conveniente decirle a los alumnos que pueden dejar la respuesta indicada, es decir, no necesitan simplificar el resultado.

Aunque las revolturas de letras son algo muy sencillo aplicándolas adecuadamente pueden resolver varios problemas. Por ejemplo, utilicémoslas para resolver uno de los ejemplos del entrenemiento de conteo básico:

Ejemplo: ¿De cuántas maneras distintas pueden acomodarse 5 personas en 8 sillas que están colocadas en fila?

Solución: Supongamos que las 5 personas se llaman Ana, Beto, Carlos, Daniela y Enrique. De esta manera convertimos nuestro problema en el siguiente: ¿De cuántas maneras distintas podemos revolver las letras de la palabra $ABCDEVVV$? Esto es porque cada una de estas permutaciones nos indicaría una forma de acomodarse: Ana se sienta donde quedó la A, Beto donde quedó la B y así sucesivamente mientras las tres sillas marcadas con V son las que quedan vacías. Pero este problema ya lo sabemos resolver, la respuesta es: $\frac{8!}{3!}$. (Notemos que en efecto esta respuesta coincide con la obtenida en el entrenamiento de conteo básico.)

Pensemos ahora en la siguiente pregunta: ¿de cuántas maneras podemos escoger las 5 sillas que se van a ocupar (de entre las 8 sillas)?

Notemos que la pregunta anterior es equivalente a esta otra: ¿de cuántas maneras diferentes podemos revolver las letras de la palabra $OOOOOVVV$? Esto es porque cada permutación de dicha palabra nos dice cuáles sillas se van a ocupar (las que quedan marcadas con O) y cuáles quedan libres (las marcadas con V). Pero esta pregunta ya la sabemos responder: el resultado es $\frac{8!}{5!3!}$.

Obsevemos que el razonamiento realizado es independiente del hecho de que hemos trabajado con sillas. Es decir, la respuesta anterior es válida para la pregunta más general: ¿de cuántas maneras podemos elegir 5 objetos de entre un total de 8 objetos si los objetos son indistinguibles entre sí? (¿A qué nos referimos con indistinguibles? Por ejemplo, cuando decíamos no sólo qué sillas se ocupaban sino también cuál persona ocupaba cada una la respuesta era $\frac{8!}{3!}$, pero ahora que sólo queremos elegir cinco sillas sin distinciones entre ellas la respuesta es $\frac{8!}{3!5!}$.)

Pensemos ahora en la pregunta aún más general: ¿de cuántas maneras podemos elegir r objetos de entre un total de n objetos si estos son indistiguibles entre sí?

Observemos que cada elección de las que queremos hacer esta representada por una permutación de una palabra formada con r $S's$ y $n-r$ $N's$ pues esto nos diría cuales de los objetos sí se elijen (las $S's$) y cuales no (las $N's$). Pero, ¿cuántas permutaciones diferentes podemos hacer? Sabemos que la respuesta es $\frac{n!}{(n-r)!r!}$. Esto nos lleva a definir:

Definición: El símbolo $\binom{n}{r}$ que se lee "combinaciones de n en r "significa el número de formas de elegir r objetos de entre un total de n objetos cuando los objetos son indistinguibles entre sí, y se calcula como $\frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Ejemplo: La mesa directiva estudiantil de la escuela "Héroes del Bicentenario" está compuesta por 7 alumnos. Quieren organizar una comisión de 3 alumnos para visitar los museos de arte, de historia y de ciencias. ¿de cuántas maneras pueden realizar esto si se quiere que

i) Un alumno de la comisión vaya al museo de arte, otro al de historia y el restante al de ciencias?

ii) Los tres alumnos de la comisón vayan juntos a los tres museos?

Solución:

i) La situación que tenemos es simplemente: cualquiera de los 7 alumnos puede ser el que vaya al museo de arte, luego cualquiera de los seis restantes puede ir al de historia y cualquiera de los cinco restantes puede ir al de ciencias. Por lo tanto, tenemos un total de $7 \times 6 \times 5 = \mathbf{210}$ maneras de realizar la repartición.

ii) Si los tres alumnos de la comisión van juntos, su labor dentro de la comisión es indistinguible así que la pregunta se reduce a simplemente, ¿de cuántas maneras podemos elegir 3 alumnos de entre 7? Y sabemos que la respuesta es $\binom{7}{3} = \mathbf{35}$.

Aprovechemos esto último para resolver de manera distinta el primer caso: Ahora en lugar de directamente asignar las labores de entre los 7 alumnos, primero elijamos la comisión y luego les damos diferentes labores dentro de la comisión. Ya sabemos que la comisión puede elegirse de $\binom{7}{3}$ maneras, y observemos que una vez formada la comisión tenemos que cualquiera de los 3 alumnos puede ser el que vaya al museo de arte, cualquiera de los otros dos puede ser el que vaya al de historia y el restante tendrá que ir al de ciencias. Es decir, hay 3! maneras de asignar las labores dentro de la comisión. Por lo tanto, el total de formas de hacer la repartición es $\binom{7}{3} \times 3!$. Notemos que este resultado en efecto coincide con lo obtenido en i).

2. Problemas

1. En un salón de la escuela "Benito Juárez"hay 15 alumnos de los cuales 6 son mujeres. ¿De cuántas maneras diferentes podemos formar un equipo de handball de 9 integrantes con la condición de que exactamente 3 de ellos deben ser mujeres?

2. En una cuadrícula de 2 renglones y 8 columnas queremos escribir en cada cuadrito un 1 o un -1 de manera que la suma de cada uno de los renglones y de cada una de las columnas sea 0. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

3. ¿Cuántos números de cuatro dígitos $abcd$ son tales que $1 \leq a < b < c < d \leq 9$?

4. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar al azar dos fichas de dominó estas puedan pegarse? (Dos fichas de dominó se pueden pegar si tienen un número en común)

5. Consiera todos los números enteros de 9 dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3 de manera que el 3 aparezca sólo 2 veces. ¿Cuántos de estos números son divisibles por 9?

6. Tenemos 5 pelotas rojas y 7 pelotas verdes. Queremos colocarlas en fila de manera que no haya dos pelotitas rojas juntas. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto? Responde la pregunta en dos casos:

   a) Las pelotas rojas son indistiguibles unas de otras e igualmente las verdes son indistiguibles entre ellas.

   b) Todas las pelotas rojas son de diferentes tamaños, y también todas las verdes son diferentes entre ellas.

7. Marquitos quire subir una escalera. El número máximo de escalones que puede subir en un paso es dos, es decir, puede subir uno o dos escalones a la vez. Si la escalera tiene 10 escalones en total, ¿de cuántas formas distintas puede subir Marquitos la escalera?

8. En una cuadrícula de 6 columnas por 5 renglones queremos ir desde el vértice inferior izquierdo hasta el vértice superior derecho desplazándonos sobre las lineas de la cuadrícula y sin pasar dos veces por el mismo punto. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto si:

   a) Sólo podemos movernos hacia la derecha y hacia arriba?

   a) Podemos movernos a la derecha, izquierda y hacia arriba pero **no** hacia abajo?

9. En la escuela "División del Norte"hay 15 alumnos que juegan básquetbol. Un equipo de básquetbol tiene 5 integrantes.

   a) ¿De cuántas maneras podemos formar dos equipos, digamos rojo y azul, para jugar un partido?

   b) ¿De cuántas maneras podemos hacer dos equipos si no se les van a entregar uniformes a los jugadores?

   c) ¿De cuántas maneras podemos formar tres equipos? (Tampoco se les van a entregar uniformes.)

   d) ¿De cuántas maneras podemos formar tres equipos uniformados, digamos, rojo, azul y verde?

   e) Ahora, con los tres equipos uniformados se va a realizar un mini torneo en el que los tres jueguen una vez contra cada uno de los otros. ¿De cuántas maneras puede realizarse el torneo?

3. Soluciones

1. Primero debemos elegir las tres mujeres de entre las 6 del salón, sabemos que esto puede hacerse de $\binom{6}{3} = 20$ formas. Luego, para completar el equipo debemos elegir 6 hombres de entre los 9 del salón, esto puede hacerse de $\binom{9}{6} = 84$ formas. Finalmente, como la elección de las mujeres es independiente de la elección de los hombres, el total de formas que tenemos para formar el equipo es: $20 \times 84 = \mathbf{1680}$.

2. Observemos que para que la suma en cada columna sea 0, la columna debe estar compuesta por un 1 y un -1. En otras palabras, el segundo renglón queda determinado por el primero, pues al escribir el primer renglón estamos forzados a escribir en el renglón de abajo lo opuesto de lo que se escribió en el renglón de arriba. Ahora, para garantizar que la suma en el primer renglón sea 0 (automáticamente la suma del segundo también será 0), debemos escribir en él cuatro $1's$ y cuatro $-1's$. Por lo tanto, nuestro problema se convirtió únicamente en ver de cuántas maneras podemos revolver en el primer renglón los cuatro $1's$ y los cuatro $-1's$. Y sabemos que esto es: $\dfrac{8!}{4!4!} = \mathbf{70}$.

3. Observemos que para obtener un número con dichas características basta elegir cuatro números diferentes del 1 al 9 y acomodarlos en orden. Por lo tanto, la solución es $\binom{9}{4} = \mathbf{126}$

4. Recordemos que la manera de calcular una probabilidad es realizar la división $(\#Eventosfavorables) \div (\#Eventostotales)$. En este caso, obtener el número de eventos favorables es responder a la pregunta ¿de cuántas maneras podemos elegir dos fichas de dominó que tengan un número en común? Para hacerlo, primero elegimos que número es el que tendrán en común. Esto es, elegimos un número de los siete posibles lo cual se puede hacer de $\binom{7}{1} = 7$ maneras. Luego, observemos que sin importar cuál número hayamos elegido hay 7 fichas distintas que lo tienen, así que las formas de elegir dos fichas con ese número son simplemente $\binom{7}{2} = 21$. Por lo tanto, el número de eventos favorables es 7×21. Por otro lado, el total de eventos son las formas de elegir dos fichas de dominó. Como hay 28 fichas, esto es $\binom{28}{2} = 14 \times 27$. Finalmente, con esto podemos calcular la probabilidad buscada: $\dfrac{7 \times 21}{14 \times 27} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}}$.

5. Recordemos que para que un número sea divisible por 9 la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 9. Ahora bien, ¿cuánto puede valer la suma de dígitos en nuestro caso? Lo mínimo que puede valer es cuando utilizamos puros $1's$ (además de los dos $3's$ que se tienen de inicio). En este caso da: $7 \times 1 + 2 \times 3 = 13$. De

la misma manera, la suma máxima que podemos obtener es $7 \times 2 + 2 \times 3 = 20$. Pero el único múltiplo de 9 que tenemos en éste rango es el 18. Por lo tanto, la suma de dígitos del número que queremos construir debe ser 18. Ahora, sea x la cantidad de $1's$ que se utilizan y sea y la cantidad de $2's$ que se utilizan. Como son 9 dígitos en total y ya tenemos dos $3's$ debemos tener $x + y = 7$. Por otro lado, para que la suma sea 18 debemos tener $x+2y+6 = 18$ o equivalentemente $x + 2y = 12$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $x = 2, y = 5$. En consecuencia, los números que buscamos son todos aquellos que estan formados por dos $1's$, cinco $2's$ y dos $3's$. Sabemos entonces que son en total $\frac{9!}{2!5!2!} = \mathbf{756}$.

6. a) Primero coloquemos en fila las siete pelotitas verdes. Ahora, para evitar que haya dos rojas juntas las rojas las colocaremos en los huecos que quedan entre las pelotitas verdes (a lo mucho una pelotita roja en cada hueco para así asegurar que no queden dos juntas). Hay 6 de tales huecos pero también podemos colocar una pelotita roja en cada uno de los extremos de la fila. De manera que entre los 8 espacios posibles debemos elejir 5 para colocar allí las pelotitas rojas. Esto puede hacerse de $\binom{8}{5} = \mathbf{56}$ maneras.

   b) Cada una de las formas de acomodar que encontramos en a) nos da un esquema de colocación. La diferencia es que ahora como las pelotitas son distintas entre sí debemos además decir cuál pelotita va en cada lugar. Para las rojas, por ejemplo, cualquiera de las cinco puede ser la que vaya hasta la izquierda (la roja que está más a la izquierda en nuestro esquema, cualquiera que este sea), luego cualquiera de las cuatro restantes puede ir en el segundo lugar y así sucesivamente hasta acomodar las 5. Tenemos entonces 5! maneras de acomodar las rojas. De la misma manera, vamos a tener 7! maneras de acomodar las verdes. Como esto se hizo para cualquier esquema, es decir para cualquier forma de acomodar rojas y verdes obtenida en a), la respuesta buscada es: $\mathbf{56} \times \mathbf{5!} \times \mathbf{7!}$.

7. Primera forma: Una manera de resolver este problema es dividirlo en casos dependiendo de cuántas veces Marquitos hace saltos de dos escalones:

   - Realiza 5 saltos de dos: Sólo hay una manera de hacer esto.
   - Realiza 4 saltos de dos: Esto quiere decir que cuatro veces salta de a dos y otras dos veces solo sube de a uno. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer esto? Claramente la respuesta es la cantidad de formas de revolver una palabra formada por cuatro $2's$ y dos $1's$, y esta es: $\frac{6!}{4!2!} = 15$.
   - Realiza 3 saltos de dos: Ahora tenemos tres $2's$ y cuatro $1's$, por lo tanto hay $\frac{7!}{3!4!} = 35$ maneras en este caso.

- Realiza 2 saltos de dos: Tenemos dos $2's$ y seis $1's$ así que hay $\dfrac{8!}{2!6!} = 28$ maneras.
- Reaiza un salto de dos: Tenemos un 2 y ocho $1's$, así que hay $\dfrac{9!}{8!} = 9$ maneras.
- Reaiza puros saltos de uno: Sólo hay una manera de hacer esto.

Por lo tanto, el total de maneras de subir la escalera es: $1+15+35+28+9+1 = \mathbf{89}$.

Segunda forma: Llamémosle e_n a la cantidad de formas que tiene Marquitos de llegar al escalón n. Por ejemplo, $e_1 = 1$ ya que tiene una sola forma de subir el primer escalón y $e_2 = 2$ pues para llegar al segundo escalón lo puede hacer con un salto doble o con dos saltos de a uno. Ahora, dividiremos a e_n en dos partes: ¿de cuantas maneras puede llegar al escalón n dado que su último paso es un salto de uno? y ¿de cuántas maneras puede llegar al escalón n dado que su último paso es un salto de dos? Claramente la respuesta a la primer pregunta es e_{n-1} y la respuesta a la segunda es e_{n-2}. Es decir, hemos obtenido que $e_n = e_{n-1}+e_{n-2}$. En otras palabras, podemos obtener el valor de un término al saber los dos términos anteriores. Ya hemos calculado e_1 y e_2. ¿Cuánto vale e_3? Por lo hecho anteriormente sabemos que: $e_3 = e_1 + e_2 = 1 + 2 = 3$. Y de la misma manera podemos ir determinando los siguientes hasta llegar a e_{10} que es el que nos interesa: $e_4 = e_3 + e_2 = 3 + 2 = 5, e_5 = e_4 + e_3 = 5 + 3 = 8, e_6 = e_5 + e_4 = 8 + 5 = 13, e_7 = e_6 + e_5 = 13 + 8 = 21, e_8 = e_7 + e_6 = 21 + 13 = 34, e_9 = e_8 + e_7 = 34 + 21 = 55, e_{10} = e_9 + e_8 = 55 + 34 = \mathbf{89}$. La sucesión infinita de la cuál hemos calculado los primeros 10 términos es conocida como la sucesión de Fibonacci.

8. a) Cualquier camino que nos lleve de la esquina inferior izquierda a la superior derecha debe subir 5 veces e ir a la derecha 6 veces. La única diferencia entre caminos es el orden en que se realizan estas operaciones. En otras palabras, la cantidad de caminos es la cantidad de permutaciones diferentes de la palabra $AAAAADDDDDD$ (A = arriba, D = derecha). Y esta cantidad es $\dfrac{\mathbf{11!}}{\mathbf{5!6!}}$.

   b) Ahora ya no podemos escribir todos los caminos como revolturas de letras pues ya no sabemos la cantidad de pasos que se necesitarán. Sin embargo, notemos que una vez llegados a un renglón ya no podemos regresar a uno inferior pues no podemos ir hacia abajo. Además dentro del renglón podemos movernos a la izquierda o a la derecha pero no en ambas pues pasaríamos dos veces por el mismo punto. Por lo tanto, un camino queda determinado el elegir las “subidas”que vamos a utilizar. Por ejemplo, para subir del nivel inferior al segundo podemos elegir cualquiera de las siete líneas que suben. Luego del segundo al tercero tendremos también siete opciones y así sucesivamente. Como debemos subir 5 veces y cada vez tenemos 7 opciones la cantidad de formas de hacer esto es $\mathbf{7^5}$.

9. a) Para elegir los 5 miembros del equipo rojo tenemos $\binom{15}{5}$ maneras. Luego para elegir los 5 miembros del azul entre los 10 restantes lo podemos hacer de $\binom{10}{5}$ maneras. Por lo tanto, el total de formas de realizar el partido es $\boldsymbol{\binom{15}{5} \times \binom{10}{5}}$.

   b) La diferencia con respecto al inciso anterior es que los equipos son ahora indistinguibles. Es decir, por cada forma de hacer el partido que obteniamos en el caso anterior ahora la opuesta (los mismos cinco que estaban de rojo ahora de azul y los cinco azules de rojo) es indistinta. Por lo tanto, la solución es $\boldsymbol{\frac{\binom{15}{5} \times \binom{10}{5}}{2!}}$.

   c) Ahora para armar el primer equipo tenemos $\binom{15}{5}$ formas, para armar el segundo $\binom{10}{5}$ formas y para el tercero $\binom{5}{5}$ formas. Notemos que en este caso los tres equipos son indistinguibles (en el caso anterior los primeros dos equipos eran indistinguibles pero el tercero sí era distinto de los otros porque eran los que **no** jugaban el partido). Por lo tanto, el resultado es $\boldsymbol{\frac{\binom{15}{5} \times \binom{10}{5} \times \binom{5}{5}}{3!}}$.

   d) Para elegir los 5 miembros del equipo rojo tenemos $\binom{15}{5}$ maneras. Luego para elegir los 5 miembros del azul nos quedan $\binom{10}{5}$ maneras y para elegir a los 5 del verde son $\binom{5}{5}$ formas. Por lo tanto, el total de maneras es $\boldsymbol{\binom{15}{5} \times \binom{10}{5} \times \binom{5}{5}}$. Notemos que es la misma respuesta que en el inciso a).

   e) Ahora además de asignar los jugadores a los equipos debemos elegir el orden del torneo. Para esto elgimos primero cuales dos juegan el primer partido, esto se puede hacer de $\binom{3}{2}$ formas. Luego para el segundo partido debe jugar el equipo que no jugó el primero y elegimos uno de los otros dos, lo cual se puede hacer de $\binom{2}{1}$ formas. El tercer partido queda ya determinado. Por lo tanto, las formas totales de realizar el torneo son

$$\boldsymbol{\binom{15}{5} \times \binom{10}{5} \times \binom{5}{5} \times \binom{3}{2} \times \binom{2}{1}}$$