Geometría

Congruencias y Semejanzas

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Introducción

En este entrenemiento trabajaremos únicamente con triángulos. La idea central es poder detectar en un dibujo cuando dos triángulos son idénticos (congruentes) o proporcionales (semejantes).

1.1. Congruencias

Empezaremos con el concepto de congruencia. Dos triángulos son congruentes cuando son idénticos, o en otras palabras, cuando tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales. Denotaremos que los triángulos ABC y DEF son congruentes mediante $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Por supesto, el determinar cuando dos triángulos son congruentes no es tan sencillo como parece. Lo que presentaremos a continuación son "criterios de congruencia". Esto es, condiciones suficientes para afirmar que dos triángulos son congruentes.

Criterio Lado-Lado-Lado: Dos triángulos ABC y DEF son congruentes si sus lados correspondientes son iguales. Esto es, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ si $AB = DE$, $BC = EF$ y $AC = EF$. En este caso, la información extra que obtenemos es que los tres ángulos correspondientes deben ser iguales, es decir, podemos concluir que $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BAC = \angle EDF$ y $\angle ACB = \angle DFE$.

Ejemplo: Sea ABC un triángulo isóceles con $AB = AC$ y sea M un punto en BC tal que $BM = MC$. Demuestra que AM es perpendicular a BC.

Solución: Consideremos los triángulos ABM y ACM. Como tenemos $AB = AC$, $BM = CM$ y $AM = AM$ concluímos $\triangle ABM \cong \triangle ACM$. Luego, tenemos que los tres ángulos correspondientes son iguales. En particular, $\angle AMB = \angle AMC$. Pero observemos que estos dos ángulos forman una línea recta, así que debemos tener

$\angle AMB + \angle AMC = 180°$. Pero esto quiere decir que $\angle AMB = \angle AMC = 90°$, o equivalentemente, AM es perpendicular a BC.

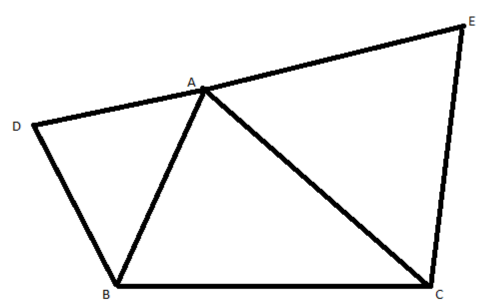
Criterio Ángulo-Ángulo-Lado: Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos correspondientes iguales y un lado igual. En este caso la información extra que obtenemos es que el tercer ángulo correspondiente y los otros dos lados correspondientes también son todos iguales.

Ejemplo: Sea $ABCD$ un paralelogramo con $AB \| CD$ y $BC \| DA$. Demuestra que $AB = CD$ y $BC = DA$.

Solución: Tracemos la diagonal AC. Observemos los triángulos ABC y CDA. Por ser águlos entre las paralelas AB y CD, $\angle CAB = \angle ACD$ y por ser ángulos entre las paralelas CD y DA, $\angle BCA = \angle DAB$. Como además tenemos $AC = CA$ concluímos que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Luego esto implica inmediatamente que los otros dos lados correspondiantes también son iguales, esto es $AB = CD$ y $BC = DA$.

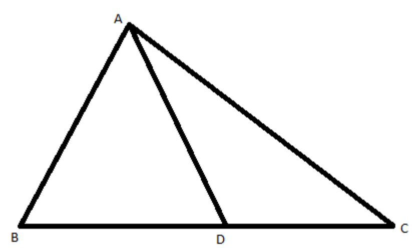
Criterio Lado-Ángulo-Lado: Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados correspondientes iguales y el ángulo *entre* ellos también es igual. En este caso la información extra que obtenemos es que los otros dos ángulos son iguales y el tercer lado también es igual.

Ejemplo: Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC se construye triángulos equiláteros ABD y ACE como se muestra en la figura. Demuestra que $BE = CD$.



Solución: Observemos los triángulos ADC y ABE. Como $\triangle ADB$ es equilátero, sus tres lados son iguales, en particular $AD = AB$. De la misma manera, como $\triangle ACE$ es equilátero obtenemos que $AC = AE$. Observemos además que como $\triangle ADB$ es equilátero sus ángulos son todos de $60°$. En particular, $\angle DAB = 60°$ y esto implica que $\angle DAC = \angle BAC + 60°$. Pero observemos que como $\triangle ACE$ también es equilátero podemos utilizar un razonamiento idéntico para obtener que $\angle BAE = \angle BAC + 60°$. Por lo tanto, $\angle DAC = \angle BAE$. Y como este es el ángulo que esta entre los pares de lados correspondientes que son iguales concluímos que $\triangle ADC \cong \triangle ABE$. Esto implica que el tercer ángulo es igual, es decir, $DC = BE$.

Es muy importante notar que en el criterio anterior el ángulo igual debe ser el que está *entre* los lados iguales. Si no lo es, *no* podemos concluir que los triángulos son congurentes, como lo muestra la siguiente figura:



En esta figura tenemos un triángulo ABC en el que se toma un punto D sobre BC tal que $AB = AD$. Si nos fijamos entonces en los triángulos ABC y ADC estos cumplen que $AB = AD$, $AC = AC$ y $\angle ACB = \angle ACD$. Sin embargo, claramente no es cierto que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

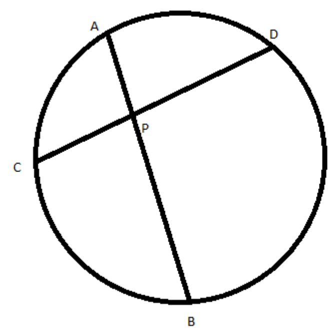
1.2. Semejanzas

Pasemos ahora a la semejanza de triángulos. El concepto central es el que dos triángulos pueden tener la misma forma (los mismos ángulos) pero no el mismo tamaño, y en vez de esto ser proporcionales. Formalmente, los triángulos ABC y DEF son semejantes si los tres ángulos correspondientes son iguales, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ y $\angle CAB = \angle FDE$, y los lados son proporcionales, es decir: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Denotaremos la semejanza de triángulos mediante $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Al igual que en el caso de las congruencias, lo que queremos es tener condiciones mínimas para poder asegurar que dos triángulos son semejantes y a partir de esto obtener nueva información. No es sorprendente que los llamados "criterios de semejanza"sean muy parecidos a los criterios de congruencia.

Criterio Ángulo-Ángulo: Dos triangulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes iguales. En este caso la información extra que obtenemos es que el tercer ángulo es también igual y que los lados son proporcionales.

Ejemplo: Sea P un punto dentro de un círculo. Se trazan secantes AB y CD que pasan por P como se muestra en la figura. Demuestra que $(AP)(PB) = (CP)(PD)$.



Solución: Tracemos las líneas AD y CB. Observemos los triángulos APD y CPB. Como son ángulos inscritos que abren el mismo arco $\widehat{AB}$ tenemos que $\angle DAP = \angle BCP$. De la misma manera, $\angle ADP = \angle CBP$. Por lo tanto, $\triangle APD \sim \triangle CPB$. Ahora, esto implica que los lados de los triángulos son proporcionales, es decir: $\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{CB}$. Pero observemos que $\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow (AP)(PB) = (PD)(CP)$ que es lo que queríamos demostrar.

Notemos que la igualdad anterior nos dice que al trazar *cualquier* secante que pase por P y multiplicar las longitudes de los segmentos en que P divide a la secante obtenemos siempre el mismo resultado. Dicho resultado es conocido como la potencia del punto P al círculo.

Criterio Lado-Ángulo-Lado: Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales y el ángulo que está *entre* los lados proporcionales es igual. En este caso la información extra que se obtiene es que los otros dos ángulos son también iguales y el tercer lado es también proporcional (está a la misma proporción que los otros dos).

Ejemplo: Sea ABC un triángulo y sean M y N puntos sobre AB y AC respectivamente tales que $AM = MB$ y $AN = NC$. Demuestra que $MN \| BC$

Solución: Tracemos la recta MN. Observemos los triángulos AMN y ABC. Como tenemos $AM = MB$, entonces $AB = AM + MB = 2AM \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$. De la misma manera podemos obtener que $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $\frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AC}$. Además claramente $\angle MAN = \angle BAC$. Como este ángulo igual es el que está entre los lados proporcionales podemos concluir que $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. Luego, esto nos dice que los otros dos ángulos también son iguales. En particular, $\angle AMN = \angle ABC$. Pero observemos que estos dos son los ángulos que se forman cuando la transversal AB corta a las rectas MN y BC. Por lo tanto, la igualdad de ángulos anterior es suficiente para asegurar que $MN \| BC$.

Criterio Lado-Lado-Lado: Dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales. En otras palabras, si en los triángulos ABC y DEF tenemos $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. La información extra que se obtiene en este caso es que los tres ángulos correspondientes son iguales.

Ejemplo: En un triángulo ABC sean M, N y P puntos sobre los lados AB, AC y BC respectivamente, tales que $AM = MB$, $AN = NC$ y $BP = PC$. Demuesta que $\angle MPN = \angle BAC$.

Solución: Notemos que este ejemplo es parecido al ejemplo anterior, tan solo hemos agregado el punto P que además cumple las mismas condiciones en el lado BC que las que cumplen M y N en sus lados respectivos. Por lo tanto, también en este caso podemos afirmar que $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ ya que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$. Ahora bien, como los triángulos son semejantes sabemos que además el tercer lado está también a la misma proporción que los otros dos. En nuestro caso, eso quiere decir que $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Por otro lado, como P cumple las mismas propiedades que M y N podemos utilizar un razonamiento análogo para concluir que $\triangle MBP \sim \triangle ABC$ y además sus lados están a proporción $\frac{1}{2}$, lo cual nos dice en particular que $\frac{MP}{AC} = \frac{1}{2}$. Finalmente, también podemos concluir que $\triangle CNP \sim \triangle CAB$ y con ello que $\frac{NP}{AB} = \frac{1}{2}$. Pero las igualdades anteriores nos dicen que $\frac{MN}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{AB}$. Por lo tanto $\triangle MNP \sim \triangle BCA$ puesto que sus tres lados son proporcionales. Luego, esto nos dice que los tres ángulos correspondientes son iguales, en particular $\angle MPN = \angle BAC$.

1.3. Aplicaciones

Las semejanzas de triángulos son una herramienta muy útil en la geometría. Para ilustrar esto, vamos a utilizarlas para demostrar dos famosos teoremas: el teorema de Thales y el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle ABC = 90°$. Entonces $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Demostración: El primer problema aquí es que sólo tenemos *un* triángulo, ¿como podemos entonces usar semejanzas? La respuesta está en trazar una nueva línea inteligentemente para generar triángulos semejantes. Esto lo logramos trazando la línea BD con D sobre AC de manera que $\angle BDA = \angle BDC = 90°$. Oservemos los triángulos ABD y ACB. Tenemos $\angle ADB = \angle ABC$ pues ambos son de 90°. Además, claramente $\angle BAD = \angle CAB$. Así que por el criterio AA, $\triangle ABD \sim \triangle ACB$. Luego, esto nos dice que los lados son proporcionales, esto es: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CB} = \frac{AD}{AB}$. Luego, $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = (AC)(AD)$.

Ahora observemos los triángulos BDC y ABC. Nuevamente tenemos $\angle BDC = \angle ABC$ por ser ambos rectos y también $\angle DCB = \angle BCA$. Por lo tanto, $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. Luego, obtenemos que los lados son proporcionales: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$. Pero vemos que $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC^2 = (DC)(AC)$.

Ahora, sumando las dos igualdades obtenidas: $AB^2 + BC^2 = (AC)(AD) + (DC)(AC) = (AC)(AD + DC) = (AC)(AC) = AC^2$. Pero esto es exáctamente lo que queríamos demostrar.

Pasemos ahora con el teorema de Thales. Antes de llegar al teorema como tal, haremos algunas demostraciones previas.

Teorema de Thales 1: Sea ABC un triángulo y sean D y E puntos en los lados AB y AC tales que $DE \| BC$, entonces $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Demostración: Como $DE \| BC$ tenemos que $\angle AED = \angle ACB$ y $\angle ADE = \angle ABC$. Entonces, por criterio AA, concluímos que $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Obtenemos entonces que los lados son proporcionales, en particular sabemos que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Para llegar de ésta expresión a la expresión deseada ($\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$) utilizaremos varios trucos algebraicos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow 1 - \frac{AD}{AB} = 1 - \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AB - AD}{AB} = \frac{AC - AE}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

Y como ahora tenemos $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ y $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ podemos afirmar que:

$$\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{DB}{AB}} = \frac{\frac{AE}{AC}}{\frac{EC}{AC}} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Teorema de Thales 2: Sea ABC un triángulo y sean D y E puntos en los lados AB y AC tales que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, entonces $DE \| BC$.

Demostración: Nuevamente utilizaremos un truco algebraico, esta vez para pasar de $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ a $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. La clave es recordar que podemos igualar la proporción dada como hipótesis a una fracción fija, digamos $\frac{1}{p}$. Esto es: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{p}$ lo cual puede reescribirse como $DB = p(AD)$ y $EC = p(AE)$. Luego, $AB = AD + DB = AD + p(AD) = AD(p+1) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD(p+1)} = \frac{1}{p+1}$ y de la misma manera, $AC = AE + AC = AE + p(AE) = AE(p+1) \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{p+1}$. Pero esto implica que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Entonces los triángulos ADE y ABC tienen dos lados proporcionales y además el ángulo entre ellos cumple $\angle DAE = \angle BAC$ y por lo tanto, por criterio LAL, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Pero esto implica que los otros dos ángulos correspondientes también son iguales, en particular $\angle ADE = \angle ABC$ y esto nos basta para concluir que $DE \| BC$.

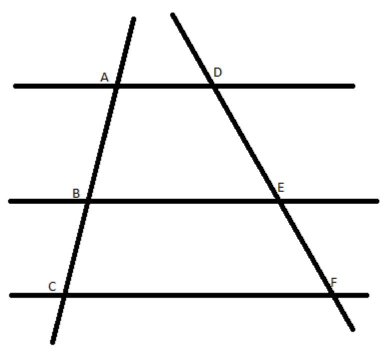
Las dos versiones del teorema de Thales que hemos estudiado pueden juntarse de manera concisa en la siguiente forma:

Teroema de Thales (versión preliminar): Sea ABC un triángulo y sean D y E puntos en los lados AB y AC. Entonces $DE \| BC$ si y sólo si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Nota para el entrenador: Es un buen momento para asegurarse que los alumnos comprendan el concepto de un "si y sólo si."

La importancia de esta versión del teorema de Thales es que nos da un nuevo criterio para decidir cuando dos rectas son paralelas. Finalmente, presentamos el teorema de Thales en su versión más general. El trabajo previo que hemos hecho nos permitirá demostrarlo fácilmente.

Teorema de Thales: Si tres (o más) paralelas son cortadas por dos transversales los segementos correspondientes en que quedan cortadas las transversales son proporcionales. Específicamente, si las transversales cortan a las paralelas en puntos A, B, C y D, E, F respectivamente, como se muestra en la figura, se tiene que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.



Demostración: Primeramente, observemos que la igualdad $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ puede rescribirse como $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Ahora, tracemos la recta AF y llamémosle P al punto en que ésta corta a la paralela de enmedio. Ahora, aplicando la version preliminar del teorema de Thales en el triángulo ACF obtenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PF}$. Pero aplicando nuevamente la versión preliminar ahora en el triángulo ADF vemos que $\frac{AP}{PF} = \frac{DE}{EF}$. Por lo tanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ que es lo que queríamos demostrar.