Geometría

Problemas de Semejanza

Olimpiada de Matemáticas en Tamaulipas

1. Problemas

Antes de comenzar con los problemas, es conveniente recordar o asegurarse que los olímpicos tienen presentes el tema de semejanza y congruencia de triángulos, así como ángulos entre paralelas y en círcunferencias (en particular las equivalencias correspondientes entre ángulos inscritos, semiscritos y centrales).

Definamos algunas rectas notables del círculo.

Definición 1. *Dada una circunferencia cualquiera con centro en O, tenemos los siguientes trazos notables:*

1) ***Radio.*** *Es cualquier segmento que une O con cualquier otro punto sobre la circunferencia.*

2) ***Cuerda.*** *Es cualquier segmento que une dos puntos distintos sobre la circunferencia.*

3) ***Secante.*** *Es una recta que pasa por dos puntos distintos que estén sobre una circunferencia.*

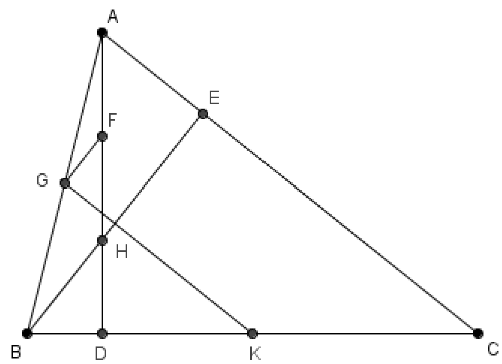
4) ***Tangente.*** *Es una recta que pasa exactamente por un punto de la circunferencia.*

Problema 1. Dada una circunferencia con centro en O y un punto A sobre la circunferencia, ¿cuánto mide el ángulo formado por la recta tangente a la circunferencia que pasa por A y el radio AO?, ¿por qué?.

Problema 2. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y P un punto fuera de ella. Sean A y B tales que AP y BP son tangentes a la cirfunferencia. Demuestra que $AP = BP$.

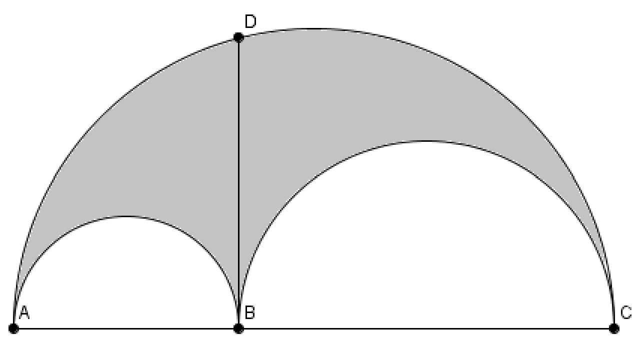
Problema 3. El punto de tangencia de dos círculos tangentes exteriormente es A, el radio de uno de los círculos es 1 y el radio del otro es 2. Sea ℓ una de las tangentes comunes a los dos círculos y que no pasa por A. ¿Cuál es la distancia de A a ℓ?

Problema 4. En la siguiente figura, BE y AD son alturas de ABC. F, G y K son puntos medios de AH, AB y BC respectivamente. Demuestra que $\angle FGK$ es un ángulo recto.



Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 4. Si P es un punto sobre AB tal que $AP = \sqrt{3}$, y Q y R son los pies de las perpendiculares trazadas desde P a las diagonales del cuadrado, ¿cuánto vale $PQ + PR$?

Problema 6. En la figura hay tres semicircunferencias, una de diámetro r, otra de diámetro s y la más grande de diámetro $r + s$ y se sabe que AC y BD son perpendiculares, además de que $BD = 1$. Encontrar el área sombreada.



Problema 7. Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera $ABCD$ forman un paralelogramo.

Problema 8. Si las diagonales de un rombo miden 8 y 6, ¿cuánto vale el área del círculo inscrito en el rombo?

Problema 9. ***Teorema de la Bisectriz.*** Sea ABC un triángulo cualquiera y ℓ la bisectriz al ángulo A. Sea además L la intersección de ℓ con BC, entonces:

$$\frac{AC}{CL} = \frac{AB}{BL}.$$

Problema 10. Sea ABC un triángulo rectángulo con $BC = 3$, $AB = 4$, $AC = 5$. La bisectriz del ángulo en C intersecta a AB en O. La circunferencia con centro en O y radio OB intersecta a la bisectriz antes trazada en Q dentro del triángulo y en P fuera del triángulo, ¿cuánto vale $\frac{CP}{PQ}$?

2. Soluciones

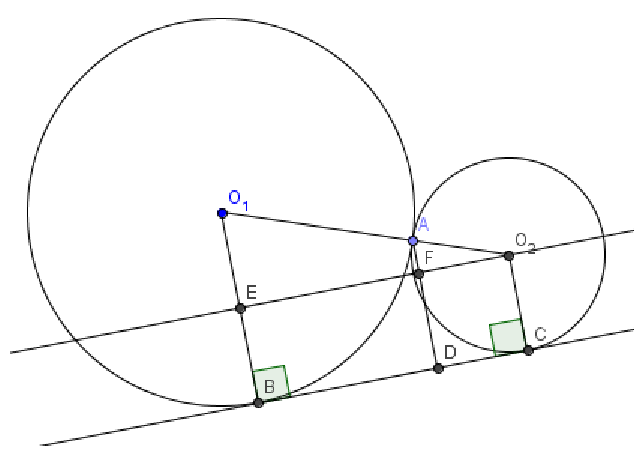
Solución 1. Mide $90°$, esto es porque la tangente y el radio mencionados forman un ángulo seminscrito que abre el arco correspondiente a media circunferencia. Como dicho arco mide $180°$, el ángulo debe medir la mitad, es decir $90°$.

Solución 2. Sea O el centro de la circunferencia. Tracemos los segmentos AO, BO y PO. Los primeros dos segmentos son radios y por el problema anterior los triángulos PAO y PBO son rectángulos, así, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $AP = BP$.

Solución 3. Sea B el punto de tangencia de ℓ con la circunferencia más grande y C con la circunferencia más pequeña. Como queremos encontrar la distancia entre A y ℓ, tracemos la perpendicular a BC que pasa por A, y llamemos D al pie de la perpendicular, así, lo que queremos encontrar es la longitud de AD. Llamemos O_1 al centro de la circunferencia más grande y O_2 al centro de la otra circunferencia. Tracemos una paralela a ℓ que pase por O_2. Llamemos F a la intersección de esta recta con AD y E a la intersección de la misma recta con O_1B. Ahora bien, como $AD = AF + FD$ y $FD = 1$, porque FD mide lo mismo que el radio de la circunferencia pequeña, O_2C, lo único que nos falta es encontrar la longitud de AF. Como están entre paralelas O_2AF y O_2O_1E son triángulos semejantes, así que

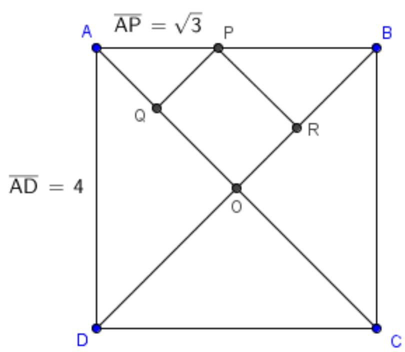
$$\frac{AF}{AO_2} = \frac{O_1E}{O_1O_2}$$

Pero $O_1E = 1 = AO_2$ y $O_1O_2 = 3$, sustituyendo y despejando tenemos que $AF = \frac{1}{3}$. Así que $AD = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.



Solución 4. Veamos el triángulo ABC. Como G y K son puntos medios de AB y BC entonces se cumple que $\frac{BG}{GA} = \frac{BK}{KC}$, y así, por Teorema de Tales, GK es paralela a AC. Del triángulo ABH tenemos que G y F son puntos medios de AB y AH respectivamente, así que análogamente tenemos que FG es paralela a BH. Pero tenemos que AC y BH son perpendiculares, así que de igual forma GK y FG lo son, en particular, $\angle FGK = 90°$.

Solución 5. En este problema tenemos un dato que realmente no es necesario, esto es que $AP = \sqrt{3}$, sin embargo esto podría llevarnos a una solución, que aunque está correcta, no es la óptima. Desarrollaremos ambas soluciones para analizarlas.
Notemos primero que los triángulos APQ y PBR son rectángulos e isósceles, el primero tiene hipotenusa igual a $\sqrt{3}$ y el segundo de $4 - \sqrt{3}$. Así, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $PQ^2 = (\sqrt{3})^2 - AQ^2$, pero $PQ = AQ$, así, $2PQ^2 = 3$, es decir: $PQ = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Análogamente $PR^2 = (4 - \sqrt{3})^2 - BR^2$, es decir $2PR = 19 - 8\sqrt{3}$, es decir: $PR = \sqrt{\frac{19-8\sqrt{3}}{2}}$. Y así ya tenemos calculado $PQ + PR$. Ahora veamos la otra solución.
Sea O la intersección de las dos diagonales del cuadrado. Por construcción $PROQ$ es un rectángulo, así que $PQ = RO$ y además sabemos que $PR = BR$, así que $PQ + PR = RO + RB = OB$, es decir, la mitad de la diagonal del cuadrado. Como el cuadrado tiene lado 4, por el Teorema de Pitágoras, su diagonal mide $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, así $PQ + PR = 2\sqrt{2}$.
La primera ventaja de la segunda solución sobre la primera es la evidente simplicidad



de la respuesta, mientras que en la primera solución es $\sqrt{\frac{19-8\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$, en la segunda es $2\sqrt{2}$. No solamente esto es importante, ¿qué pasaría si el problema en lugar de decir "... sea P un punto sobre AB tal que $AP = \sqrt{3}$...", dijera "... sea P un punto cualquiera sobre AB...". El problema podría resolverse con la segunda demostración pero no con la primera. Este problema trata de hacer ver que antes de entrar directamente a los cálculos y operaciones hay que ver y analizar bien el problema, aunque claro, en un examen debe tratarse de resolver los problemas de cualquier forma que al alumno se le ocurra.

Solución 6. Los radios de las semicircunferencias son $\frac{r}{2}$, $\frac{s}{2}$ y $\frac{r+s}{2}$. El área sombreada es el área de la semicircunferencia más grande menos el área de las dos semicircunferencias más pequeñas, es decir:

$$\frac{\pi\left(\frac{r+s}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{s}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi\left(\frac{r^2+2rs+s^2-r^2-s^2}{4}\right)}{2}=\frac{\pi rs}{4}.$$

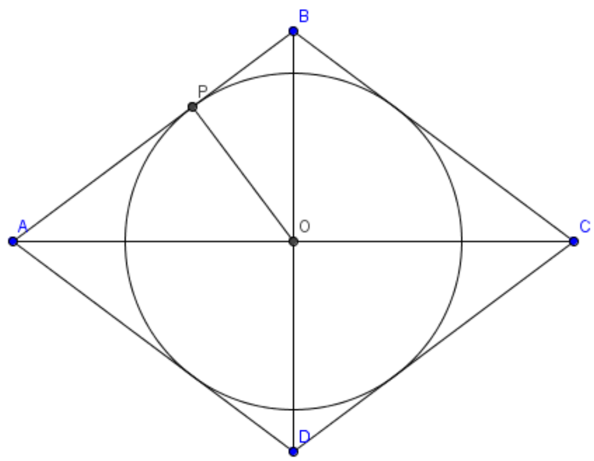
Así que solo nos falta conocer el valor de rs. Como AC y BD son perpendiculares, los triángulos ABD y CDB son rectángulos, así que podemos aplicarles el Teorema de Pitágoras, de donde obtenemos que $AD^2 = r^2 + 1$ y $DC^2 = s^2 + 1$. Además $\angle ADC = 90°$, por abrir media circunferencia, así que por Pitágoras en este triángulo tenemos que $AC^2 = AD^2+DC^2$. Sustituyendo las igualdades obtenidas anteriormente tenemos que $AC^2 = r^2 + 1 + s^2 + 1$, pero además, notemos que $AC = r + s$, así que $(r + s)^2 = r^2 + s^2 + 2$, pero $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$. Por lo tanto, sustituyento esto tenemos que $r^2 + 2rs + s^2 = r^2 + 2 + s^2$, que eliminando los términos semejantes nos resulta que $2rs = 2$, es decir $rs = 1$. Por lo tanto, el área sombreada es $\frac{\pi}{4}$.

Solución 7. Sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Debemos ver que el cuadrilátero $EFGH$ es paralelogramo, es decir que sus pares de lados opuestos son paralelos, es decir que EF es paralelo a GH y que FG es paralelo a EH. Observemos el triángulo ABC, en este tenemos que E y F son puntos medios de AB y BC, entonces se cumple que $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{CF} = 1$, y por el Teorema de Tales tenemos que EF es paralela a AC. En el triángulo ADC observamos lo mismo: H y G son puntos medios de AD y DC, entonces, por el Teorema de Tales HG es paralela a AC. EF es paralela a AC y AC es paralela a HG, entonces EF es paralela a HG. Análogamente debemos ver que en el triángulo ABD y en el CBD, por el Teorema de Tales tenemos que EH es paralela a BD y GF también, lo que concluye nuestra demostración.

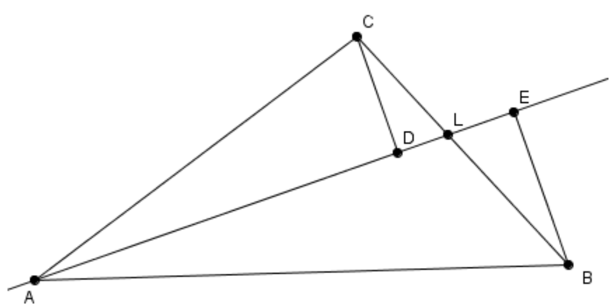
Solución 8. Sea $ABCD$ el rombo, la mitad de sus diagonales miden 4 y 3, entonces, por el Teorema de Pitágoras, el lado del rombo mide 5. Tracemos la circunferencia inscrita en el rombo, con centro O (la intersección de las diagonales), y llamemos P a uno de los puntos de tangencia (sin pérdida de generalidad, tomemos el que está sobre el lado AB). Queremos el área del círculo, para encontrarla solamente necesitamos el valor del radio, en este caso OP. Como son rectángulos y comparten uno de los ángulos agudos, los triángulos AOP, ABO y OBP son semejantes. De $\triangle AOB \simeq \triangle OPB$ obtenemos que

$$\frac{OP}{4} = \frac{3}{5},$$

así, $OP = \frac{12}{5}$ y por lo tanto el área de la circunferencia es $\frac{144\pi}{25}$.



Solución 9. Tracemos las perpendiculares a ℓ que pasan por C y B. Al pie de la primera perpendicular la llamaremos D y al de la segunda, E. Al ser perpendiculares tenemos que $\angle CDL = 90° = \angle LEB$, además $\angle CLD = \angle BLE$, por ser opuestos por el vértice, entonces $\triangle CLD \simeq \triangle BLE$, y de aquí obtenemos que $\frac{CL}{BL} = \frac{CD}{BE}$. Como ℓ es bisectriz tenemos que $\angle CAD = \angle BAE$, entonces al ser ACD y ABE triángulos rectángulos con uno de los ángulos agudos igual son semejantes, y de esta semejanza podemos obtener que $\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB}$. Juntando las dos igualdades obtenidas queda demostrado el teorema.



Solución 10. Sea $r = OB$. Entonces $PQ = 2r$, que es uno de los segmentos que necesitamos, así que una buena estrategia es encontrar el valor de r. Por el Teorema de la Bisectriz tenemos que $\frac{AC}{BC} = \frac{AO}{r}$. Sustituyendo los valores que tenemos la ecuación se convierte en $\frac{5}{3} = \frac{AO}{r}$, es decir $5r = 3AO$. También, como $AO + r = AB = 4$ tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas: $AO + r = 4$ y $3AO - 5r = 0$. Resolviendo este sistema obtenemos que $r = \frac{3}{2}$. Ahora necesitamos el valor de CP, pero $CP = CO + r$ o bien, $CP = 2r + CQ$. Con el valor de r, como también conocemos el valor de BC y el hecho de que OBC es un triángulo rectángulo, podemos calcular el valor de CO, el Teorema de Pitágoras nos dice que $CO^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2$, es decir, $CO^2 = \frac{45}{4}$, o bien, $CO = \frac{3}{2}\sqrt{5}$. Finalmente

$$\frac{CP}{PQ} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{5} + 1)}{3} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

A este número se le conoce como razón áurea, un número importante e histórico en las matemáticas.