30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Jornada 2

Fecha de entrega: 30 de julio de 2016

Equipos

Equipo Bisectriz: Carlos Enrique, Roberto, Diego, César.

Equipo Recta de Euler: Luis Reyes, Gerardo, Belem Abigail, Salvador.

Equipo Eje Radical: Zafiro, Carlos Gamiño, Isis, Jorge Cortés.

Equipo Excentro: Carlos Alberto, Juan Pablo, Abigail Chávez, Alejandro.

Equipo Recta de Simson: David, Max, Yazmín, Erick.

Equipo Punto de Fermat: Patricia, Brandon Antonio, Axel, Juan José.

Equipo Triángulo órtico: José Antonio, Jesús Anaya, Domingo, Omar.

Equipo Ceviana: Brandon del Ángel, Nayeli, Julieta, Andrés.

Equipo Circuncentro: Daniel, Jessica, Cristian, Carlos (Invitados).

Teoremas y Resultados Bonus

Sumas telescópicas, Principio de casillas, Fórmula para saber el número de divisores, Solución de ecuaciones de segundo grado por factorización, Teorema del ángulo semi-inscrito.

Problemas Anclados y Bloqueados

N1 está bloqueado para Jesús Anaya y Julieta. A4 bloqueado para David, Roberto e Isis. C4 está bloqueado para Axel. G4 anclado a David, Jesús Anaya y Roberto. C4 anclado a Julieta, César y Paty. G2 anclado a Yazmín y Nayeli. A3 anclado a Max, Brandon del Ángel y Belem Abigail.

Lista de Problemas

Área: Teoría de Números

Problema N1. En cada cara de un cubo se escribe un entero mayor a cero y en cada vértice se escribe el producto de los números escritos en las caras que llegan a dicho vértice. Si la suma de los números en los vértices es 1001. ¿Cuál es la suma de los números escritos en las caras?

Problema N2. Muestra que para cualquier pareja de enteros positivos a y b, el número $(36a + b)(a + 36b)$ no puede ser una potencia de dos.

Problema N3. Encuentra todas las ternas (a, b, c) tales que $a + b + c = 29$ y que su producto tenga exactamente 8 divisores.

Problema N4. Si $S(n)$ es la suma de dígitos de n. Encuentra todos los enteros positivos n tal es que $n(S(n) - 1) = 2010$.

Área: Combinatoria

Problema C1. Seis cajas están númeradas $1, 2, \ldots, 6$. Se van a repatir N pelotas en ellas, determina el valor más chico de N tal que para al menos un valor k, la caja con el número k tenga al menos k^2 pelotas.

Problema C2. A un conjunto lo llamaremos *triferenciado* si tiene al menos dos elementos y la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es mayor o igual que 3. ¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ son *triferenciados*?

Problema C3. En una cuadrícula de 2017×2017 se consideran como puntos todos los vértices de los cuadrados. ¿Cuántos rectángulos con vértices en los puntos marcados se pueden formar si se quiere que los lados sean paralelos a los lados de la cuadrícula? Nota: Recuerda que los cuadrados también son rectángulos.

Problema C4. Un código *mexica* es una sucesión de ceros y unos que no tiene tres o más dígitos iguales consecutivos. Por ejemplo, 010011010110 y 11001100 son códigos mexicas, mientras que 001111010 no lo es. ¿Cuántos códigos mexicas hay con 12 dígitos en los cuales hay más unos que ceros?

Área: Álgebra

Problema A1. Sea f_i el i-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Demuestra que

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} + 1.$$

Problema A2. Si se sabe que dos de los números $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{b+c}$ y $\frac{c}{c+a}$ son $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$. ¿Cuánto vale el tercero?

Problema A3. Dada la sucesión:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1+a_1}, a_3 = \frac{1}{1+a_2}, a_4 = \frac{1}{1+a_3}, \ldots$$

Determina el producto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{15}$, es decir, la multiplicación de los primeros 15 términos.

Problema A4. Juan tiene un terreno cuadrado de lados enteros donde construyó una alberca cuadrada también de lados enteros. Encuentra todas las posibles medidas del terreno y de la alberca para que le queden $1089m^2$ para sembrar pasto.

Área: Geometría

Problema G1. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A. La tangente a su circuncírculo en A corta a BC en M. Además el incirculo toca a AC en S y a AB en R. La recta RS corta a AM en N y a AR en U. Muestra que $MN = MU$.

Problema G2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con $BC > AB$. Sobre los lados BC y AD se trazan cuadrados por fuera del paralelogramo y sean P y Q los centros de dichos cuadrados. Demostrar que $BPDQ$ también es paralelogramo.

Problema G3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con sus diagonales perpendiculares, la recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y es perpendicular a un lado, biseca al lado opuesto.

Problema G4. Se tienen cinco puntos en el plano entre los cuales no hay tres colineales. Prueba que cuatro de ellos son los vértices de un cuadrilátero convexo.