30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Jornada 4

Fecha de entrega: 13 de agosto de 2016

Equipos

Sotero Prieto: Patty, Juan José, Abigail Chávez, Alejandro.

Samuel Gitler: Carlos Enrique, Jesús Anaya, Yazmín, Omar.

Graciela Salicrup: Max, Julieta, Jorge Cortés, Zafiro.

José Adem: Luis Reyes, Isis, Erick, Gerardo.

Carlos Graef: Andrés, César, Salvador, Brandon Antonio.

Víctor Neumann: Axel, José Antonio, Domingo, Nayeli.

José Canavati: Carlos Delgado, Brandon del Ángel, Diego, Roberto.

Humberto Cárdenas: Carlos Gamiño, Abigail Miranda, David, Juan Pablo.

Alberto Barajas: Daniel, Yessica, Cristian, Carlos, Karla (Invitados).

Teoremas y Resultados Bonus

Si $a|b$ y $c|d$, entonces $ab|cd$. Demostración por contradicción. Principio de Casillas. Teorema de Tales. Teorema de Pitágoras.

Problemas Anclados y Bloqueados

A3 y G3 bloqueado para Roberto y Jesús Anaya. A1 bloqueado a David. G4 anclado a Patty, Axel, Carlos Delgado. C3 anclado a Jesús Anaya, Julieta, Roberto. G3 anclado a Carlos Gamiño, Brandon Antonio y Gerardo Lozano. N4 anclado a Domingo y Luis Reyes.

Lista de Problemas

Área: Teoría de Números

Problema N1. Decimos que un número primo es *raro* si tiene una sola cifra o si al suprimir su primera cifra se obtiene otro número primo *raro* y al suprimir su última cifra se obtiene un número *raro*. Determina todos los números primos *raros*.

Problema N2. La ruta que une A con B tiene 999 km. Cada 1 km. hay una señal con dos números: el primero es la distancia recorrida desde A y el segundo es la distancia que falta para llegar a B. Por ejemplo, la señal en A es 0 999 y la señal a 45 km. de A es 45 954 . En total hay 1000 señales, contando la de A y la de B. En un viaje de A a B, Pablito se entretiene contando las señales que usan exactamente dos dígitos. Por ejemplo, cuenta la señal 0 999 porque usa exactamente dos dígitos (0 y 9), pero no cuenta la señal 45 954 , porque utiliza tres dígitos (4, 5 y 9). ¿Cuántas señales cuenta Pablito en el viaje desde A hasta B?

Problema N3. ¿Es posible encontrar tres subconjuntos disjuntos A_1, A_2 y A_3 del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ tales que se utilicen todos los elementos de A y 102 divida a la suma de los elementos de A_1, 203 divida a la suma de los elementos de A_2 y 304 divida a la suma de los elementos de A_3?

Problema N4. Determina todos los enteros positivos a y b tales que $8a+1$ es múltiplo de b y $8b+1$ es múltiplo de a.

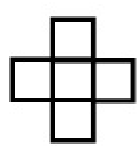
Área: Combinatoria

Problema C1. Demuestra que si r y n son números enteros tales que $0 \leq r < n$ entonces:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}.$$

Problema C2. Un gato camina sobre un teclado de una computadora y escribe dos palabras de 5 letras con la peculiaridad de que entre las dos palabras había 5 letras consecutivas, en cada palabra había 2 letras repetidas y entre las 10 letras no había 3 repetidas. ¿De cuántas formas pudo haber escrito las palabras?

Problema C3. ¿Cuál es la mayor cantidad de cruces de la siguiente forma que pueden



acomodarse en una cuadrícula de 8×8 sin que las cruces se traslapen ni se salgan de la cuadrícula?

Problema C4. Anabel y Bernardo van a un cine que tiene 16 filas de 22 asientos cada una. Cuando llegan al cine hay 175 personas sentadas. Demuestra que, sin importar como estén sentadas las personas, Anabel y Bernardo podrían encontrar dos asientos vacíos en la misma fila para sentarse juntos.

Área: Álgebra

Problema A1. Sean a y b números reales tales que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \frac{1}{\sqrt[3]{ab}} = 0$. Encuentra el valor de $a + b - \frac{1}{ab}$.

Problema A2. Demuestra que para todo n natural, $n! + (n+1)! + (n+2)!$ es divisible por $n+2$.

Problema A3. Los números a, b y c cumplen que $abc = 1$ y $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Demuestra que alguno de a, b o c es igual a 1.

Problema A4. Encuentra todos los enteros positivos m y n tales que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

Área: Geometría

Problema G1. Sea ABC un triángulo equilátero con M el punto medio de AC y N el punto medio de AB. el círculo que pasa por los puntos A, B y M intersecta a BC en E. Sea D la intersección de NE con el círculo y P la intersección de BA con DM. Demuestra que $BM \cdot MC = BC \cdot PM$.

Problema G2. Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC y sea H su ortocentro. Sea N el punto medio de AH y sea M el punto medio de BC. Demuestra que NM es perpendicular a FE.

Problema G3. Sea $ABCD$ un rectángulo con AB más grande que AD y tal que BD mide 6. Sea P un punto en AB tal que $AP = AD$ y sea Q un punto sobre la prolongación del lado AD tal que $AQ = AB$ (D debe quedar entre A y Q). ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero $APCQ$?

Problema G4. Sean E y F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita del triángulo ABC con los lados AB y BC respectivamente. La bisectriz del ángulo CAB intersecta a la recta EF en K. Demuestra que CKA es recto.