

Paridad

Problema 0. Investiga en que consiste dar un argumento por contradicción.

Problema 1. En la etapa estatal de la olimpiada de matemáticas en Tamaulipas hay 101 concursantes, cada concursante al llegar saluda a al menos otro concursante. ¿Es posible que todos los concursantes hayan dado solo un saludo?

Problema 2. Los números del 1 al 10 se escriben en un renglón. ¿Es posible colocar entre ellos los signos + y - de manera que la suma sea cero? Ejemplo: con los números 1 2 3 4 es posible pues

$$1 - 2 - 3 + 4 = 0 .$$

Problema 3. En un tablero de 15×15 se ponen los números 1 al 15 de manera que en cada renglón y columna cada número aparezca una y solo una vez. Además el tablero queda simétrico por su diagonal principal. ¿Qué números quedan en la diagonal principal?

Problema 4. Los enteros positivos w, x, y, z satisfacen:

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \quad \text{¿Cuál es la paridad de } wxyz?$$

Problema 5. El producto de 22 enteros es igual a 1. ¿Puede ser que la suma de estos números sea cero?

Problema 6. Considera un tablero de ajedrez de 8×8 al que se le han quitado los cuadritos unitarios que son esquinas opuestas del tablero. ¿Puedes llenar el nuevo tablero con dominós de 2×1 ó 1×2 ?

Sugerencias: Nota que cada domino ocupa un cuadrito negro y otro blanco, con esto trata de establecer un condición para que **no** sea posible el acomodo, por último ¿De qué colores son los cuadritos que se quitaron?

Problema 7. En una recta, se toma un segmento PQ y 45 puntos, todos ellos fuera del segmento PQ . ¿Es posible que las distancias de los puntos a P sea la misma que las distancias de los puntos a Q ?

Sugerencia: Como todos los demás problemas la respuesta es que **no** es posible.

Para este problema considera los puntos que quedan del lado de P y los que quedan del lado de Q . Si queda del lado de P separa su distancia a Q como la distancia a P más el segmento PQ de manera análoga para lo que quedan del lado de Q . Con esto, trata de concluir que no es posible.

Conteo

Problema 1. Considera una cuadrícula de 25×25 cuadritos. Si se pueden pintar de rojo contornos de cuadrados de cualquier tamaño, ¿cuál es el menor número de contornos de cuadrados que se deben pintar para tener todas las líneas de la cuadrícula de color rojo?

Problema 2. Para un tablero de 2015×2015 se pintan de negro sus columnas de manera alternada, después se pintan sus filas de negro de manera alternada. ¿Cuántos cuadritos negros quedan cuando se acaba de pintar?

Problema 3. ¿De cuántas maneras distintas puedes cubrir un tablero de 4×4 con fichas de dominó?

Nota: las fichas de dominó son de 2×1 que se pueden poner horizontal o vertical.

Problema 4. Tres dados de 10 caras cada uno (cada cara con algún número de puntos entre 1 y 10) se van a lanzar. ¿De cuántas maneras distintas pueden caer, de manera que no haya dos dados con la misma cantidad de puntos?

Problema 5. ¿Cuántos números de seis cifras tienen al menos un dígito par?

Problema 6. En cierta ciudad, se van a construir 10 casas en fila cada una puede ser de madera o ladrillo, pero por seguridad no pueden haber dos casas de madera consecutivas. ¿De cuántas maneras es posible construir las casas?

Problema 7. Un grupo de cinco amigos deben elegir un líder para su grupo, y lo hacen por medio de votaciones, nadie puede votar por si mismo ¿De cuántas maneras pueden votar de manera que no haya dos amigos digamos A y B de manera que A vote por B y este último por A?

Problema 8. Un dominó binario y marciano tiene fichas con un cero de un lado, y un uno del otro. Tenemos 6 fichas azules (las seis iguales), una roja y una verde. ¿De cuántas formas podemos hacer una fila con las ocho fichas si no debe haber dos fichas seguidas con cero juntos, pero sí puede haber dos unos seguidos, un cero seguido de un uno y un uno seguido de un cero?