Sistema Decimal

Problema 1. Un número se dice *ultra-par* si todos sus dígitos son pares. Encuentra la máxima diferencia y la segunda máxima diferencia que puede obtenerse restando dos números ultra pares consecutivos.

Nota. Que sean consecutivos, significa que no hay ultra-pares entre ellos, los números 266 y 264 son ultra-pares consecutivos y su diferencia es dos.

Problema 2. Un número auto-descriptivo es un entero m en el cual cada dígito d en la posición n (=0,1, 2,...,9) cuenta las instancias del dígito n en m. El número auto-descriptivo más pequeño es 1210, pues tiene 1 cero, 2 unos, 1 dos y 0 treses. Encontrar el mayor número auto-descriptivo.

Problema 3. Una sucesión de números mayores que 0 comienza con cualquier número y el siguiente será la resta entre el número anterior y el número capicúa más cercano que sea menor o igual al número. Por ejemplo:

$$2016 \rightarrow 14 \rightarrow 3 \rightarrow 0$$

Se observa que 14=2016 - 2002; 3 = 14 - 11 y 0 = 3 - 3. La sucesión termina cuando se llega a cero, en el ejemplo la sucesión tuvo cuatro términos ¿Cuál es el número más pequeño con el que puede iniciar la sucesión para que tenga exactamente 5 términos?

Nota: Un número capicúa es un número que se lee igual de derecha a izquierda y de izquierda a derecha, como 5, 33, 242,5995, etc.

Problema 4. Para escribir todos los números naturales del $1ab$ al $ab2$ (inclusive) se han empleado $1ab1$ cifras (a y b son dígitos) ¿Cuántos valen a y b?

Problema 5. Un número se dice *unido* si es la unión de tres números consecutivos de tres dígitos, por ejemplo 123124125 es *unido*. Un número se dice *distinguible* si un digito aparece en él entonces aparece al menos dos veces, y si dos dígitos distintos aparecen, entonces aparecen una cantidad distinta de veces. El número 215511222 es *distinguible* pero 88366 no, pues el tres aparece una vez solamente y el ocho y seis aparecen la misma cantidad de veces. Encuentra todos los números unidos que sean distinguibles.

Criterios de Divisibilidad

Problema 1. Encuentra criterios de divisibilidad para el 15, 21 y 63.

Problema 2. ¿Puede una potencia de dos acabar en 1998?

Problema 3. El mago Fumanchú tiene sobre una mesa acomodados en fila, en orden ascendente, los números del 1998 al 2008. Al pasar su varita mágica sobre ellos, los 11 números cobran vida y se revuelven (es decir, aunque siguen acomodados en fila ya no están en orden ascendente). A continuación, Fumanchú dice la palabra mágica "mecachis!" y los números (en su nuevo acomodo) se conjuntan para formar un sólo número de 44 cifras. ¿Es posible que el número obtenido al final del proceso sea un número primo?

Problema 4. Construye un número que sea divisible por todos los números del 2 al 8 y tal que la suma de sus cifras sea 2010.

Problema 5. Encuentra el entero positivo m más pequeño que cumple que el número $m + 2m + 3m + \cdots + 9m$ tiene todos sus dígitos iguales.

Problema 6. Encuentra todos los números capicúas de tres dígitos que sean múltiplos de quince.

Problema 7. ¿Existe un múltiplo de 63 que tenga 7 cifras y cada cifra sea un 7 ó 9?

Problema 8. Un número abc es *chido* si:

- Todas sus cifras son distintas y mayores a uno.
- Las fracciones $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$ y $\frac{ba}{c}$ son enteros (ab , bc y ba son números de dos dígitos no multiplicaciones).

a) Encuentra el número *chido* más grande

b) ¿Qué números *chidos* tienen la misma cifra en la centena que el número encontrado en el inciso anterior?

Factorización en primos

Problema 1. Encuentra un método para decidir si un número es primo.

(Que sea más o menos eficiente, puedes investigar el hecho de que todo número que no sea primo tiene un divisor menor o igual a su raíz cuadrada)

Problema 2. Investiga el lema de Euclides (¡y entiéndelo ¡)

Problema 3. Toma algunos números de tres o cuatro dígitos e intenta factorizarlo en primos, por ejemplo 2016,2015 etc.

Problema 4. Encuentra el mayor entero que no tenga cifras repetidas y tal que el producto de sus cifras sea un cuadrado perfecto.

Problema 5. Encuentra 7 números consecutivos tal es que ninguno de ellos sea un número primo.

Problema 6. Encuentra todos los números primos $p < q < r$ tal es que $25pq + r = 2004$ y $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

Problema 7. Encuentra todos los números primos, p, q tal es que $p + q$ y $p - q$ sean números primos.

Problema 8. Para a y b enteros positivos, no divisibles entre 5, se construye una lista de números como sigue:

- El primer número es 5 y,
- a partir del segundo, cada número se obtiene multiplicando el número que le precede (en la lista) por a, y sumándole b.

(Por ejemplo, si a=2 y b=4, entonces los primeros tres números de la
lista serán: 5, 14, 32 (pues 14=5·2+4 y 32=14·2+4.)

¿Cuál es la cantidad máxima de primos que se pueden obtener en la lista antes de obtener el primer número no primo?

Problema 9. Un entero positivo se denomina *tico* si es el producto de tres números primos diferentes que suman 74. Verifique que 2014 es *tico*. ¿Cuál será el próximo año *tico*? ¿Cuál será el último año *tico* de la historia?

Problema 10. Un año se dice *cool* si al factorizarlo en primos de manera que no haya exponentes en dicha factorización, reordenar el producto de ellos y eliminar los signos $\times$ se obtiene un número capicúa. 2015 es *cool* pues 2015 = 5x13x31 = 13x5x31 y el número 13531 es capicúa. Encuentra el siguiente año *cool* que sea impar.

Nota. Factorizar de manera que no haya exponentes, es expresar el número que tenga exponente como varias veces el producto de ese número, por ejemplo 81 es *cool* porque es 3x3x3x3 y 3333 es capicúa.