Teoría de Números

Orlando Ochoa Castillo

23 de septiembre de 2011

1. Divisibilidad

La Teoría de Números es un tema muy importante en las Olimpiadas de Matemáticas, esta área estudia el comportamiento de los números enteros, observando distintas características de ellos.

Un tipo de números muy particulares son los llamados *Números primos* que son aquellos números naturales que tienen exactamente dos divisores positivos.

El primer teorema importante que induciremos es:

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental de la Aritmética)**.** *Todo número entero positivo mayor a 1 se puede representar de forma única como producto de factores primos.*

Definición 1.2. *Decimos que **a** divide a **b**, o bien, que **b** es divisible por **a** (se representa, $a|b$), si el resultado de dividir b entre a es entero, es decir, la división deja residuo 0.*

Normalmente decimos que si $a|b$, entonces a es un factor de b. Otra forma de decirlo es que $a|b$ significa que $b = am$, para algún entero m.

Proposición 1.3. *Las siguientes propiedades se cumplen:*

1. *Si $a|b$, entonces $a|bc$ para cualquier c entero.*
2. *Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.*
3. *Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|b+c$ y $a|b-c$, más aún, $a|bx+cy$ para cualesquiera x y y enteros.*
4. *Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = \pm b$.*
5. *Si $a|b$ y $0 < a, b$, entonces $a \leq b$.*
6. *Si $p|ab$ y p es primo, entonces $p|a$ o $p|b$.*

Otros elementos importantes para el estudio de la Teoría de Números son los siguientes:

Definición 1.4 (Mínimo Común Múltiplo). *El mínimo común múltiplo de dos o más números es el número natural más pequeño que es múltiplo de ellos, o bien, el número natural más pequeño que es divisible por todos los números. El mínimo común múltiplo de dos números x y y se representa como $mcm(x, y)$.*

Definición 1.5 (Máximo Común Divisor). *El máximo común divisor de dos o más números es el número natural mayor que divide a dichos números, se representa como $mcd(x, y)$.*

Definición 1.6. *Dos números se dicen primos relativos o coprimos si su máximo común divisor es 1.*

Problema 1. *El conjunto de números primos es infinito.*

Problema 2. *Demostrar el criterio de divisibilidad del 3.*

Problema 3. *Demostrar que un entero de la forma $6k + 5$ es necesariamente de la forma $3k - 1$.*

Problema 4. *Demostrar que sólo existe un primo p tal que $2p + 1$ es un cubo.*

Problema 5. *Juan juega a escribir números. Iniciando con dos enteros positivos cualesquiera a_1 y a_2, Juan escribe en la lista de números positivos $a_1, a_2, \ldots$ de manera que cada número a_{n+1} a partir del tercero satisface la siguiente relación con los dos anteriores:*

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1} - k a_n + 450.$$

Donde el número k es el número entero positivo favorito de Juan. Beto observa que en la lista que ha escrito Juan está el número 2009 (pero no es ninguno de los primeros tres números de la lista) ¿Cuál es el número favorito de Juan?

Anteriormente mencionamos que un número natural puede ser expresado como producto de números primos, digamos $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, entonces el número de divisores de N es $(1 - \alpha_1) \cdot (1 - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 - \alpha_k)$.