30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Tamaulipas 2016

ETAPA REGIONAL
SOLUCIONES

Problemas:

1. Para el primer gato tenemos 6 casos: i) Que sea macho rojo; ii) hembra roja; iii) macho amarillo; iv) hembra amarilla; v) macho azul; vi) hembra azul.
   i) Hay 10 machos rojos, entonces para la elección del primer gato son 10 y para el segundo son 9, además estamos tomando esa pareja 2 veces, por lo que 10x9 hay que dividirlo por 2, es decir, en este caso hay 45 opciones.
   ii) Hay 5 hembras rojas, para la primera elección hay 5 y para la segunda 4, eliminando repeticiones tenemos 10 opciones.
   iii) Hay 12 machos amarillos, para la primera elección hay 12 y para la segunda 11, eliminando repeticiones tenemos 66 opciones.
   iv) Hay 6 hembras amarillas, para la primera elección hay 6 y para la segunda 5, eliminando repeticiones tenemos 15 opciones.
   v) Hay 14 machos azules, para la primera elección hay 14 y para la segunda 13, eliminando repeticiones tenemos 91 opciones.
   vi) Hay 7 hembras azules, para la primera elección hay 7 y para la segunda 6, eliminando repeticiones tenemos 18 opciones.
   En total hay 45+10+66+15+91+18=245 formas de tomar dos gatos con las condiciones pedidas.

2. Construyamos la sucesión de atrás para adelante, comenzando con el 0 e ir tomando el número menor que podamos ir tomando para el término siguiente. Para el segundo, el menor a tomar es el 1, que al ser capicúa se restaría a si mismo y quedaría 0. El tercer término no podría ser de 1 dígito, porque se restaría a sí mismo y entonces no podría estar el 1 como lo elegimos, así que tomemos el número de dos dígitos más pequeño que al restarle un capicúa nos de 1, este número es el 10, pues 10 – 9 = 1. La diferencia máxima entre un número de dos dígitos y el capicúa menor más cercano es 10, siempre que el dígito de las unidades del número sea 1 menor que el dígito de las decenas, luego, hay que tomar el menor, es decir, el cuarto término será 21. Por esa misma afirmación, el siguiente término no podrá ser de 2 dígitos, pues la diferencia máxima es 10 y no 21 como queremos. Notemos que lo mismo pasa para los números de 3 dígitos, la diferencia máxima con su capicúa más cercano es 10, entonces, el quinto término tiene que ser de 4 dígitos, tomemos el menor capicúa de 4 dígitos para sumarlo a 21, este es el 1001, por lo tanto, el quinto término de la sucesión es 1022.
   $$1022 \rightarrow 21 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

3. Como buscamos el más grande podemos ver si hay con a = 9. Para este caso tendríamos que $9 \mid \overline{bc}$ es decir $b+c$ es múltiplo de 9.
   Caso 1: $b+c=0$ Entonces ambos son cero, y no se cumpliría la condición de que sus cifras sean distintas.
   Caso 2: $b+c=9$ Por paridad uno de ellos es par y el otro impar, si b es el par y c el impar

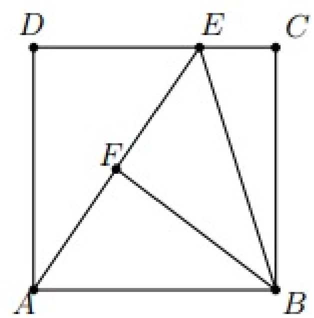
entonces $\frac{ac}{b}$ no es entero, pues sería impar y lo estaría dividiendo un par, lo mismo pasa si b es impar y c par.
Caso 3: $b+c=18$ Como son dígitos, entonces ambos deben ser nueve, pero no se cumpliría lo de las cifras distintas. Por tanto no hay con $a=9$. Busquemos con $a=8$. Entonces $\frac{bc}{8}$ debe ser entero y c debe ser par, $c=2{,}4\,ó\,6$ .Tendremos que $abc=8b2, 8b4\,ó\,8b6$ en cada uno se cumple que $\frac{82}{b}, \frac{84}{b}, \frac{86}{b}$ son enteros.

Si $\frac{82}{b}$ es entero, como 82=41x2 entonces b=2, $abc=822$ y no cumple.

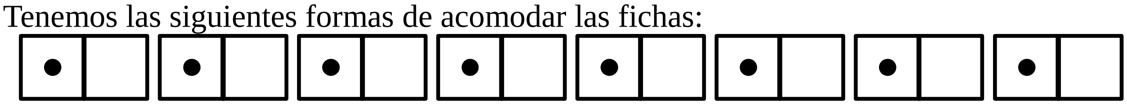
Si $\frac{84}{b}$ es entero, como 84=4x7x3 los dígitos que lo dividen son 2, 3, 4, 6, 7. Entonces b=2, 3, 6 ó 7. Y $abc=824, 844, 834, 864\,ó\,874$. Pero uno repite cifras, y 834 ni 874 son *chidos* pues $\frac{34}{8}, \frac{74}{8}$ no son enteros. Aquí obtenemos los números *chidos* 824 y 864.

Si $\frac{86}{b}$ es entero, como 86=2x43 entonces $b=2$ y $abc=826$ el cual no es chido pues $\frac{26}{8}$ no es entero. En conclusión los números 824 y 864 son chidos, el más grande es 864 y el único que comparte centena con él es 824.

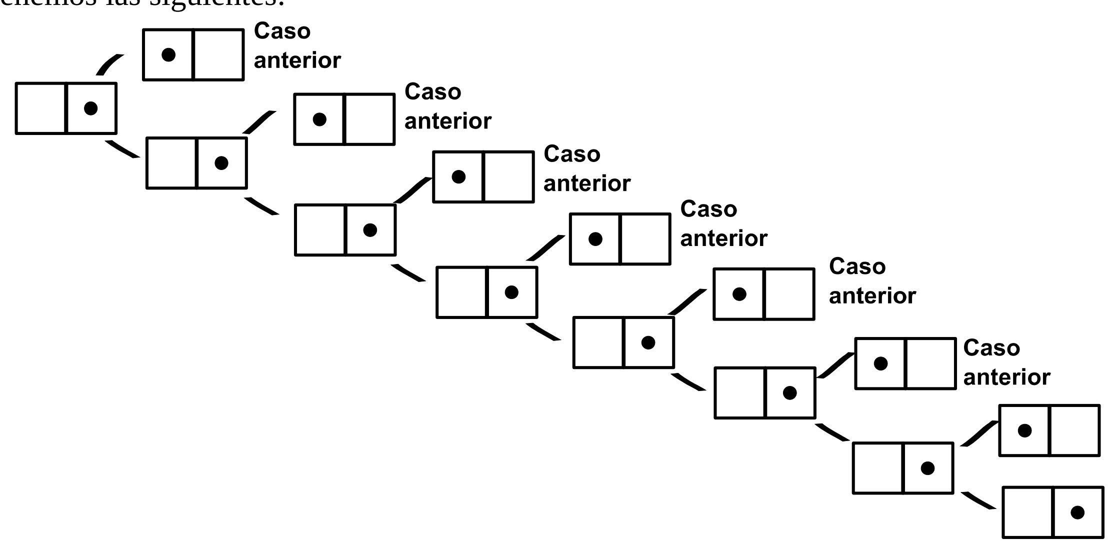
4. El lado del cuadrado es 84. Tracemos el segmento EB. Notemos que el triángulo ABE tiene base AB y altura BC, por lo tanto, su área es la mitad del cuadrado original, es decir, 3528. Además, los triángulos AFB y EFB tienen su base AF=EF respectivamente y la misma altura, por lo que sus áreas son iguales, en particular el área del EFB es la mitad del triángulo AEB, es decir, 1764, así que el área del triángulo ECB debe ser 252 para que el área de ECBF sea 2016. Como la base del triángulo ECB es el lado del cuadrado, 84, el segmento EC debe medir 6.



5. Tenemos las siguientes formas de acomodar las fichas:



En el caso que se empieza con la ficha con el 1 al inicio y cuando se comienza con el 0 al inicio tenemos las siguientes:



En total tenemos 9 formas de ordenar las fichas, sin tener el cuenta los colores aun. Hay 6 fichas azules, 1 verde y 1 roja. Al tener las 8 fichas ya acomodadas en cada caso, para elegir en qué lugar irá la verde, tenemos 8 opciones y luego para elegir la posición de la roja tendremos 7, en total 56 formas por principio multiplicativo. Como hay 9 formas de acomodar las fichas, en total hay 56 x 9 = 504 formas.

CRITERIOS SUGERIDOS

1.

Dividir en 6 casos correctos.	2 puntos
Contar correctamente los casos (En caso que se equivoquen en algunos casos se puede penalizar puntos)	3 puntos
Utilizar el principio aditivo para obtener la solución	2 puntos

2.

Idea de construirlo desde el 0 hacia atrás.	1 punto
El siguiente término es el 1.	1 punto
El tercer término es el 10.	1 punto
Notar que la diferencia máxima entre un número de dos dígitos y el capicúa menor más cercano es 10.	1 punto
El siguiente término es 21.	1 punto
La observación también funciona para números de 3 dígitos.	
Concluir que la sucesión debe comenzar con el 1022.	1 punto

3.

Justificar que no hay chidos que empiezan con 9.	3 puntos
Cuando empiezan con 8, c debería ser par.	1 punto
Ir descartando correctamente las posibilidades para b.	2 puntos
Obtener las soluciones	1 punto

4.

Obtener el lado del cuadrado (84)	1 punto
Trazar o considerar EB.	1 punto
Calcular el área de AEB (3528).	1 punto
Calcular el área de EBF (1764).	2 puntos
Determinar que el área de ECB debe ser 252.	1 punto
Determinar que EC debe medir 6.	1 punto

5.

Ver el caso en el que se comienza con (1,0).	1 punto
Ver los 8 casos comenzando con el (0,1).	2 puntos
Considerar las fichas sin color como lugares posibles para acomodar los colores.	1 punto
Contar correctamente las 56 opciones de cómo acomodar los colores.	2 punto
El total de opciones es 56x9 = 504.	1 punto