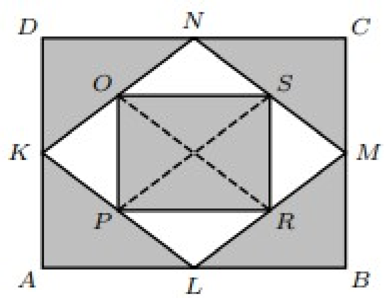
32 Olimpiada Mexicana de Matemáticas Tamaulipas 2018

ETAPA REGIONAL
SOLUCIONES

Problemas:

1. El área del cuadrilátero NKLM es $\frac{1}{2}$, así que la suma de las áreas de los 4 triángulos DNK, NCM, MBL y KLA es $\frac{1}{2}$. Dividiendo el cuadrilátero OPRS en cuatro cuadriláteros iguales como se muestra en la figura, se observa que el área del rectángulo OPRS es la mitad del área de NKLM, o sea $\frac{1}{4}$. De lo anterior tenemos que el área sombreada es $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.



2. El 2 y todos los números que empiezan con 2 y tienen puros ceros cumplen la condición. Para la cantidad de ceros tenemos desde 0 hasta 2017 ceros, así que de esta forma tenemos 2018 números. Ahora debemos contar los números que poseen dos dígitos 1 y el resto ceros. Estos números quedan determinados solo por la elección de la posición de los 1's. Esta elección la podemos hacer de $\frac{2018\times2017}{2}=2035153$ formas que es el total de números de esta forma. Como no hay otra forma de sumar 2, el total de casos es 2035153+2018=2037171.

3. Cuando alguno de los tres es 0, el producto será 0 que es un cuadrado perfecto. Para elegir el 0 tenemos dos opciones (unidades o decenas), para el primer dígito distinto de 0 tendremos 9 opciones y para el segundo tenemos 8, es decir, en este caso tenemos 2x9x8=144 opciones.
Si ninguno de los dígitos es 0, como no podemos repetir, podemos descartar los cuadrados de los dígitos primos, pues la única opción sería duplicar ese dígito, es decir: 4, 9, 25, 49 y 81. Notemos que para que los números a multiplicar sean dígitos (ya habiendo descartado los primos), debemos considerar solo los cuadrados de números que son producto de potencias de 2 y de 3. Las posibilidades que quedan es que los cuadrados sean 16, 36, 64 y 144. Las tercias de dígitos que cumplen son: Para el 16 cumplen {1,2,8}. Para el 36 cumplen {1,4,9} y {2,3,6}. Para el 64 cumple {2,4,8}. Para el 144 cumple {3,6,8} y {2,8,9}. Por cada una de estas 6 tercias hay 6 formas de acomodar los dígitos, por lo tanto, sin dígitos 0 tenemos 6x6=36 números. En total 144+36=180 números.

4. Sean $\angle ABM = b$ y $\angle ACN = a$. Por suma de ángulos internos del triángulo BCN tenemos $15x + b = 180$ (1). Por suma de ángulos internos del triángulo CMB tenemos $16x + a = 180$. Igualando ambas ecuaciones tenemos $15x + b = 16x + a$ de donde $b - x = a$. Ahora por suma de ángulos internos del triángulo ABC tenemos: $13x + a + b = 180$, es decir, $13x + b - x + b =$

180 de donde se llega a que $b = 90 - 6x$. Ahora sustituyendo en (1) tenemos $15x + 90 - 6x = 180$, $9x = 90$. Así $x = 10$ y $b = 30$.

5. No puede ser que haya diez empates, porque entonces cada equipo tendría igual puntuación que los demás y esto contradice la hipótesis.
   No puede ser que haya nueve empates, porque en tal caso un único equipo gana, un único equipo pierde, y los restantes tres equipos sólo empatarían y por lo tanto tendrían la misma puntuación, y una vez más contradice la hipótesis.
   No puede haber ocho empates porque entonces en dos partidos habría dos ganadores y dos perdedores. Esto a su vez se divide en subcasos. Si un mismo equipo ganó dos partidos, entonces uno o dos perdieron partidos, y luego los restantes tres o dos tendrían igual puntuación y esto contradice la hipótesis. Si dos equipos distintos ganan, entonces o uno pierde dos veces o dos pierden, y también habría al menos dos equipos con la misma puntuación, por lo tanto se contradice la hipótesis.
   Veamos que siete empates sí es posible que ocurran en el torneo. Usemos X > Y para indicar que el equipo de inicial X le gana al equipo con inicial Y. Veamos que los puntajes 6, 5, 4, 3 y 2 se obtienen con siete empates, luego debemos ver cómo tratar a los tres partidos donde no hubo empate. Suponga que A > B, A > C, con lo cual A tiene 6 puntos; D > C con lo cual D tiene 5 puntos; E queda con 4 puntos; B queda con 3 puntos y C queda con 2 puntos.