30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Tamaulipas 2016

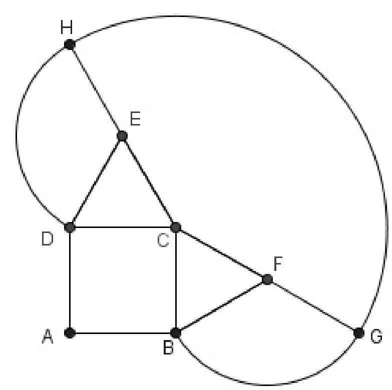
ETAPA REGIONAL (EXAMEN DE PRÁCTICA)
SOLUCIONES

Problemas:

1. Notemos primero que $343=7^3$, así que los números deben tener tres números 7 y un número 1, de otra forma el producto de sus cifras no podría ser 343. Los númers con dichas cifras entre 5,678 y 9,876 son 7771, 7717, 7177.

2. Notemos que para las banderas con asta, es determinente el orden en que se eligen los colores, puesto que no es lo mismo una bandera con un color, digamos verde, pegado al asta que otra con otro color, digamos rojo, pegado al hasta. Para el colo pegado al hasta tenemos 4 posibles opciones, después de esto, para el color de enmedio nos quedarán solo 3 opciones y finalmente, para el color del extremo tendremos 2 opciones, por lo tanto tendremos 4x3x2=24 opciones posibles para dicha bandera.
   Para la otra parte, al no usarse asta, es lo mismo elegir un color en uno de los extremos, que en otro. Para ver cuántas banderas distintas podemos formar, primero elijamos el color del centro, para esto podemos tomar 4 colores distintos, posteriormente, para los colores de los extremos, hay que elegir dos colores de los 3 restantes, esto lo podemos hacer de 3 maneras distintas, por lo tanto, la cantidad de banderas distintas si no se va a usar asta son 4x3=12.

3. La cabra se puede mover dentro de las siguientes regiones circulares. El arco que va de G a H es un arco de circunferencia con centro en C y radio los 20m de cuerda, puesto que no hay nada que se interponga en el paso de la cabra. El ángulo GCH resulta de restarle a los 360° de la circunferencia completa, los ángulos correspondientes al cuadrado y a los dos triángulos equiláteros, por lo tanto el ángulo GCH mide 360° - 90° - 60° - 60° = 150°. Como 150 ÷ 360 = 5 ÷ 12, entonces la razón entre el sector circular pedido y el área total de la circunferencia de radio 20 es precisamente 5 ÷ 12. Como el área de la circunferencia de radio 12 es 400π m^2, entonces, dicha área que necesitamos calcular es 400π (5) ÷ 12 = 500π ÷ 3. Ahora bien, las otras dos regiones están delimitadas por dos arcos de circunferencias de radio 10 y ángulo 120°, puesto que los ángulos DEH y GFB son de 180° - 60°. Así que cada una de esas áreas es una tercera parte del área de la circunferencia de radio 10, que es 100π, es decir 100π ÷ 3. Por lo tanto, el área total en el que puede estar la cabra es :



$$(500\pi + 100\pi + 100\pi) \div 3 = 700\pi \div 3.$$

4. Los meses impares y su cantidad de días son Enero (31), Marzo (31), Mayo (31), Julio (31), Septiembre (30) y Noviembre (30). Los meses pares y su cantidad de días son Febrero (28), Abril (30), Junio (30), Agosto (31), Octubre (31) y Diciembre (31). Veamos la siguiente tabla, en la que aparecen cuántas piedras más tiene acumula al finalizar cada uno de los meses. El punto máximo lo alcanza el 31 de julio, cuando tendrá 36 piedras más que al inicio de año. Al final de cada año tendrá 3 piedras más que al incio. Así que para el 1 de enero de 2002 tendrá 3 piedras, al 1 de enero de 2003, 6 piedras, al 1 de enero de 2004, 9 piedras y al 1 de enero de 2005, 11 piedras, pues el 2004 es bisiesto. Cada 4 años aumentará 11 piedras. Al 1 de enero de 2025 tendrá 66 piedras, y un año antes tendrá 64, puesto que 2024 es bisiesto. Como 64+35=99, eso quiere decir que el 31 de julio de 2024 junta las 99 piedras y esa es la cantidad máxima de piedras que acumula ese año. Como el 2025 lo comienza con 66 piedras, el 31 de marzo tendrá 66+34=100 y es cuando alcanzaría su libertad juntando 100 piedras.

Al Finalizar cada mes	**Cuántas piedras más tiene que al iniciar el año**
Enero	+31
Febrero	+3 (+2 en bisiesto)
Marzo	+34 (+33 en bisiesto)
Abril	+4 (+3 en bisiesto)
Mayo	+35 (+34 en bisiesto)
Junio	+5 (+4 en bisiesto)
Julio	+36 (+35 en bisiesto)
Agosto	+5 (+4 en bisiesto)
Septiembre	+35 (+34 en bisiesto)
Octubre	+4 (+3 en bisiesto)
Noviembre	+34 (+33 en bisiesto)
Diciembre	+3 (+2 en bisiesto)

5. La lista es b, a, bb, ba, ab, aa, bbb, bba, bab, baa, abb, aba, aab, aaa, etc. Notemos que con 1 dígito hay 2 números posibles. Con 2 hay 4 números posbiles, con 3 dígitos hay 8 números posibles, en general, por Principio Multiplicativo, para n dígitos, si solo podemos tomar 2 cifras distintas tendremos 2^n números. Las potencias de 2 son 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Si enlistamos todos los números desde 1 hasta 6 cifras, en la lista tendríamos 2+4+8+16+32+64=126 números, por lo que el el número de la posición 126 es el último de los de 6 dígitos, es decir, el número aaaaaa.