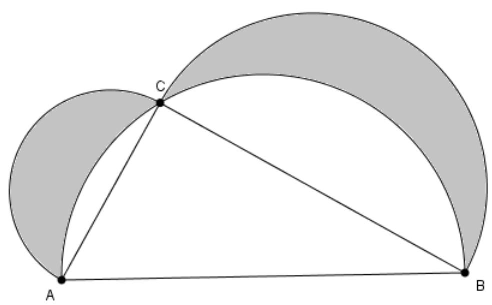
32 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Primer Examen Selectivo. 31 de Agosto de 2018

Duración 4 horas, durante la primera de ellas puedes hacer preguntas por escrito.

Problemas:

Problema 1. Sea ABC un triángulo rectángulo en C y se dibuja la semicircunferencia con diámetro AB. Sobre los lados AC y BC se dibujan otras dos semicircunferencias. Demuestra que la suma de las áreas sombreadas es igual al área del triángulo ABC.



Problema 2. Considera un tablero de 2018×2018. En cada casilla tienes un foco prendido o apagado puedes hacer uno de los siguientes dos movimientos:

- Tomar 1009 focos que estén uno a lado de otro y cambiar el estado de cada uno de ellos.
- Tomar 1008 focos que estén uno a lado de otro y cambiar el estado de cada uno de ellos.

Muestra que no importa cómo están los focos inicialmente, mediante los movimientos anteriores siempre es posible hacer que solo los focos de los bordes estén prendidos.
NOTA: Cambiar de estado un foco es pasarlo de prendido a apagado o viceversa.

Problema 3. Con baldosas cuadradas, todas de ellas iguales, con lados que miden un número entero de unidades se puede embaldosar una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una baldosa, el segundo día se pusieron dos baldosas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $\angle ABC = 90°$ y $AB > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB tal que $BD = BC$. Sean E el pie de la perpendicular desde D hacia AC, y F un punto tal que CD es la mediatriz de BF. Demuestre que EC es la bisectriz del $\angle BEF$.