32 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Primer Examen Selectivo. 31 de Agosto de 2018

Duración 4 horas, durante la primera de ellas puedes hacer preguntas por escrito.

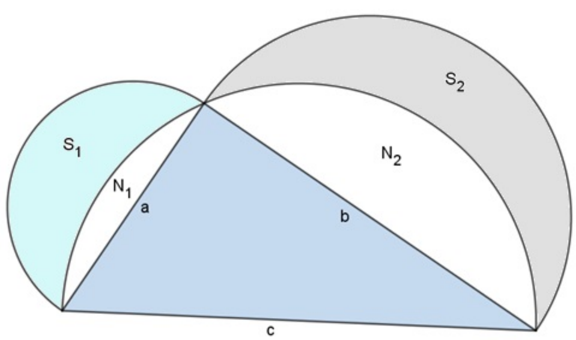
Problemas:

Problema 1. Sea ABC un triángulo rectángulo en C y se dibuja la semicircunferencia con diámetro AB. Sobre los lados AC y BC se dibujan otras dos semicircunferencias. Demuestra que la suma de las áreas sombreadas es igual al área del triángulo ABC.

Solución 1. Sean a y b las longitudes de los catetos del triángulo y c la longitud de la hipotenusa. El área del triángulo es $\frac{a \cdot b}{2}$. Por otro lado, las áreas sombreadas miden $S_1 = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - N_1$ y $S_2 = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} - N_2$, donde N_1 y N_2 son las medias lunas que quedan sobre los catetos del triángulo. Sabemos que $N_1 + N_2 = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} - \frac{a \cdot b}{2}$. Por lo tanto

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{8}(a^2) + \frac{\pi}{8}(b^2) - \frac{\pi}{8}(c^2) + \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot b}{2}.$$

La última igualdad se da ya que, por el Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$.



Problema 2. Considera un tablero de 2018×2018. En cada casilla tienes un foco prendido o apagado puedes hacer uno de los siguientes dos movimientos:

- Tomar 1009 focos que estén uno a lado de otro y cambiar el estado de cada uno de ellos.
- Tomar 1008 focos que estén uno a lado de otro y cambiar el estado de cada uno de ellos.

Muestra que no importa cómo están los focos inicialmente, mediante los movimientos anteriores siempre es posible hacer que solo los focos de los bordes estén prendidos.
NOTA: Cambiar de estado un foco es pasarlo de prendido a apagado o viceversa.

Solución 2. Demostremos que podemos cambiar el estado de un foco sin alterar el estado de ninguno más. Esto lo hacemos tomando el foco que queremos cambiar de estado. Si el foco se encuentra en una de las primeras 1009 filas, tomaremos dicho foco y los 1008 focos que están sobre él en esa misma columna y hacemos el primer movimiento. Luego tomamos el foco sobre el que tomamos originalmente y tomamos los 1007 focos arriba de éste. Así logramos cambiar el estado de un solo foco, pues todos los de arriba se cambiaron de estado dos veces. Si el foco se encuentra en una de las 1009 filas últimas, hacemos lo mismo pero hacia abajo. Ya con esto, cambiaremos el estado de todos los focos en el borque que estén apagados a prendidos y todos los de dentro de dicho contorno que están encendidos a apagados.

Problema 3. Con baldosas cuadradas, todas de ellas iguales, con lados que miden un número entero de unidades se puede embaldosar una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una baldosa, el segundo día se pusieron dos baldosas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

Solución 3. Supongamos que requerimos de n baldosas de área $k \times k$. Entonces el área total cubierta fue $nk^2 = 2^5 \times 3^4 \times 7$. Las opciones que tenemos para n es la factorización anterior, pero sin factores cuadrados que podrían ser el valor de k^2, es decir: $2^3 \times 3^4 \times 7$, $2 \times 3^4 \times 7$, $2^5 \times 3^2 \times 7$, $2^5 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 7$, $2^3 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 7$ y 2×7. Además sabemos que si fueron d días los que trabajamos, entonces $n = 1 + 2 + \cdot + d = \frac{d(d+1)}{2}$. Entonces, sabemos que n debe poder escribirse como la mitad el producto de dos consecutivos, así que para el producto $d(d+1)$ las opciones nos queda: $2^2 \times 3^4 \times 7$, $3^4 \times 7$, $2^4 \times 3^2 \times 7$, $2^4 \times 7$, $2^2 \times 3^2 \times 7$, $2^2 \times 3^2 \times 7$, $2^2 \times 7$, $3^2 \times 7$ y 7. De estas, la única que nos puede dar el producto de dos números consecutivos es $2^4 \times 3^2 \times 7 = 63 \times 64$. Por lo tanto requerimos de $1 + 2 + \ldots + 63 = \frac{63 \times 64}{2} = 2016$ baldosas.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $\measuredangle ABC = 90°$ y $AB > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB tal que $BD = BC$. Sean E el pie de la perpendicular desde D hacia AC, y F un punto tal que CD es la mediatriz de BF. Demuestre que EC es la bisectriz del $\measuredangle BEF$.

Solución 4. Como DBC es un triángulo isósceles por construcción y $\measuredangle ABC = 90°$ entonces $\measuredangle BDC = \measuredangle BCD = 45°$. Como CD es mediatriz de BF, si P es su intersección, entonces $BP = PF$ y $\measuredangle BPC = \measuredangle FPC$ y por el criterio LAL, $\triangle BPC$ y $\triangle FPC$ son congruentes y en particular $\measuredangle PCF = 45°$. De la misma manera, del otro lado de la mediatriz, llegamos a que $\measuredangle PDF = 45°$ y por lo tanto $\measuredangle CFD = 90°$. Ahora bien, como $\measuredangle DEC = 90° = \measuredangle DBC$, entonces $DBCE$ es cíclico, pues tiene dos ángulos opuestos que suman $180°$. De aquí que $\measuredangle BEC = \measuredangle BDC = 45°$. Además $DEFC$ es cíclico, pues $\measuredangle DEC = 90° = \measuredangle DFC$, que son dos ángulos que abren el mismo lado, entonces $\measuredangle CEF = \measuredangle CDF = 45°$. Por lo tanto tenemos que $\measuredangle BEC = \measuredangle CEF = 45°$, es decir CE divide a $\measuredangle BEF$ en dos ángulos iguales.