30 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Soluciones Jornada 3

16 de agosto de 2016

Problema N1. Sea n un entero mayor o igual a 10. A n se le quita el dígito de las unidades y se obtiene un número m. Encuentra todos los n tales que m divide a n.

Solución (Por Julieta). Sea $n = 10m + u$, con u el dígito de las unidades. Si $m|n = 10m + u$, como $m|10m$, entonces $m|u$. Si $u = 0$, cualquier m lo divide. Si $u \neq 0$, como es un dígito, m debe ser también de un dígito y puede ser cualquiera de los divisores de u, entonces, si $u = 1$, $m = 1$; si $u = 2$, $m = 1, 2$; si $u = 3$, $m = 1, 3$; si $u = 4$, $m = 1, 2, 4$; si $u = 5$, $m = 1, 5$; si $u = 6$, $m = 1, 2, 3, 6$; si $u = 7$, $m = 1, 7$; si $u = 8$, $m = 1, 2, 4, 8$; si $u = 9$, $m = 1, 3, 9$. Por lo tanto n puede ser $11, 12, 22, 13, 33, 14, 24, 44, 15, 55, 16, 26, 36, 66, 17, 77, 18, 28, 48, 88, 19, 39, 99$ o cualquier múltiplo de 10.

Problema N2. Un número natural de n dígitos es *armonioso* si sus n dígitos son una permutación de $1, 2, 3, \ldots, n$ y sus primeros k dígitos forman un número divisible por k, para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Por ejemplo, 321 es armonioso pues 3 es divisible por 1, 32 es divisible por 2 y 321 es divisible por 3. Encuentra todos los números armoniosos de 6 dígitos.

Solución. Utilizaremos los números del 1 al 6. Denotaremos n como $abcdef$, donde cada letra representa a uno de los dígitos. Como $abcde$ debe ser múltiplo de 5, entonces $e = 5$. Como ab debe ser múltiplo de 2, $abcd$ debe ser múltiplo de 4 y $abcdef$ debe ser múltiplo de 6, entonces a, d, f deben ser los números 2, 4 y 6, por lo que para a y c quedan únicamente 1 y 3 en algún orden. También necesitamos que abc sea múltiplo de 3, así que $3|a+b+c$, pero $a + c = 4$, entonces la única opción posible para b es que $b = 2$. Como $abcd$ es múltiplo de 4, y c es 1 o 3, entonces d podría ser solamente 6, porque ya no puede ser 2, porque $b = 2$, ni 4 porque ni 14 ni 34 son múltiplos de 4. Ya tenemos todos los números determinados salvo a y e que podrían ser 2 opciones, así que los números armoniosos son 123654 y 321654.

Problema N3. Encuentra todos los números de tres dígitos que se incrementan en 75 % al invertir sus dígitos.

Solución (Por Carlos Gamiño). Tengo un número abc, donde a, b, c son dígitos, al invertirlos deben tener un incremento del 75 % por lo que $cba > abc$ y para que esto suceda $c > a$. Sea $cba - abc = xyz$, con x, y, z también dígitos. z está determinado por la diferencia entre c y a, pero como $c > a$, al hacer la resta $a - c$, se le deberá "pedir prestado 1 a b", por lo tanto $z = 10 + a - c$. Además, como el segundo dígito de ambos números a restar es b, pero le pidieron uno prestado, a su vez tendrá que pedir uno prestado a c, por lo tanto $y = 10 + b - b - 1 = 9$. Finalmente, si la diferencia entre a y c es k, x será $k - 1$. Como las diferencias posibles para k son del 1 al 8, las posibilidades para xyz son $099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792$. Como estos números representan un incremento del 75 %, podemos aplicar una regla de 3 para ver el 100 % correspondiente, es decir, los posibles abc y al sumarlo con xyz resultan los posibles cba.

75 %	**abc**	**cbc**
99	132	231
198	264	462
297	396	693
396	528	924
495	660	1155

A partir de ahí los números resultantes en la tercera columna son de 4 dígitos, por lo que no podrían ser cba, así, los únicos números que cumplen son 132, 264 y 396.

Problema N4. Dado un número de 3 cifras abc se calculan los residuos de las divisiones $abc \div bc$ y $bc \div c$. Encuentra todos los números que producen residuos 1 y 5 (en ese orden).

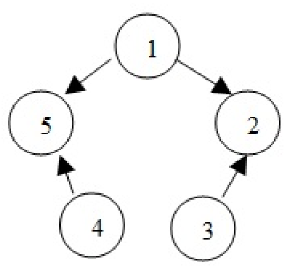
Solución (Por Axel). Se empieza con que $bc \div c$ deje residuo 5, para esto necesitamos que $c \geq 6$, y que c debe ser impar, pues si es par, bc también sería para y el residuo sería par también, así que $c = 7$ o $c = 9$. Ahora se busca el valor de b. Si $c = 7$, tenemos que $7n+5 = 10b+7$, o bien $7n = 10b+2$. Como el único múltiplo de 7 de dos dígitos terminado en 2 es el 42, entonces $b = 4$. Si $c = 9$, entonces $9n + 5 = 10b + 9$, es decir, $9n = 10b + 4$, de igual forma el único múltiplo de 9 de dos dígitos que termina en 4 es el 54, por lo tanto $b = 5$. Ahora buscamos a de manera que $a47 \div 47$ deje residuo 1 o bien $a59 \div 59$ deje residuo 1. Haremos lo mismo que en el caso anterior: $47n+1 = 100a+47$, o bien, $47n = 100a+46$, y el único múltiplo de 47 de tres dígitos que termina en 46 es 846, es decir, $a = 8$. Finalmente, $59n + 1 = 100a + 59$, o bien, $59n = 100a + 58$, pero no hay múltiplos de 59 de tres dígitos que terminen en 58, por lo tanto 847 es el único número que cumple.

Problema C1. Consideremos tres casas: A, B y C. Al inicio de la semana, cada casa tiene 10 gatos que son de ahí. Durante una noche sale un gato de cada casa a pasear, y al teminar la noche a cada casa llega uno de los gatos, pero ya no necesariamente de esa casa. Después de 7 noches, denotamos por $d(i, j)$ al número de gatos que están en la casa i pero son de la casa j, por ejemplo, $d(B, C) = 2$ quiere decir que tras la séptima noche hay 2 gatos en la casa B que pertenecen a la casa C. Demuestra que alguna de las sumas $d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$ o $d(A, C) + d(C, B) + d(B, A)$ es menor o igual a 10.

Solución. La suma $d(A,B)+d(B,C)+d(C,A)+d(A,C)+d(C,B)+d(B,A)+d(A,A)+d(B,B)+d(C,C)$ es 30 pues cuenta a todos los gatos. Además, como solo han pasado 7 días, al menos hay 3 gatos bien en cada casa. Por lo tanto $d(A,A)+d(B,B)+d(C,C) \geq 9$. De aquí que $(d(A,B)+d(B,C)+d(C,A))+(d(A,C)+d(C,B)+d(B,A)) \leq 21$. Pero entre paréntesis tenemos a dos números que sumarán a lo más 21, de modo que alguno de ellos deberá ser menor o igual a 10.

Problema C2. En una mesa redonda están sentados 2009 pitufos, cada uno con un número escrito en el gorro. Pitufo Matemático se dió cuenta que para cada par de pitufos sentados en lugares vecinos el número del gorro de uno de esos pitufos divide al número del gorro del otro. Demuestra que hay dos pitufos no vecinos con los que pasa lo mismo, es decir, el número del gorro de uno, divide al número del gorro del otro.

Solución. Tratemos de forzar a que no se cumpla, es decir, que no haya otros 2 pitufos que no sean vecinos y que el número del sombrero de uno divida al número del otro. Hagamos un ejemplo con un número pequeño para mostrar la idea.



En esta mesa tenemos 5 pitufos, la flecha indica que el número del pitufo de un lado de la flecha divide al del otro, es decir, por ejemplo, el número del gorro 1 divide al número del gorro 2. Para que no se cumpla la condición no debe haber 2 flechas hacia la misma dirección consecutivas, entonces, si vemos la figura como un n-ágono, a cada uno de los lados debemos ponerle una dirección, para evitar lo que queremos, tendríamos que la dirección de las flechas debe ir alternada en los lados, un lado hacia la izquierda y el siguiente hacia la derecha. Como el número de lados del n-ágono es impar, 2009, entonces esto no es posible y por lo tanto sí habrá 2 flechas hacia la misma dirección y por el hecho de que si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c tenemos aquí dos pitufos no vecinos que cumplen la condición.

Problema C3. Considera un tablero cuadrículado de manera regular con área N. Al colocar un triángulo no degenerado dentro de él (o en los bordes) decimos que es *tranquilo*, si cada vértice coincide coincide con algún vértice de los cuadritos unitarios interiores, además si uno de sus lados es paralelo a algún lado del tablero. Supón que se han colocado $N+1$ triángulos *tranquilos*, muestra que hay dos con la misma área.

Solución (Por Julieta). La base del triángulo es paralela a uno de los lados del tablero, entonces la altura igualmente es paralela a otro de los lados. El área de cada triángulo se calcula mediante su base y altura, y si los valores entre su base y altura se invierten el área sigue siendo la misma. Entonces el área de cada triángulo es una longitud que puede valer desde 1 hasta a, multiplicada por otra longitud que puede valer desde 1 hasta b, sobre 2. Desde 1 hasta a hay a opciones, desde 1 hasta b hay b opciones. $(a)(b) = N$, N áreas distintas que pueden tener, por principio de Casillas, con $N+1$ triángulos al menos 2 tienen la misma área.

Problema C4. Sea n un entero positivo. Demuestra que el número de soluciones enteras positivas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n$ es

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

Solución (Por Jesús). Imaginemos al número n como una fila alineada de n unos

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n = \underbrace{11\ldots11}_{\text{n unos}}.$$

Veamos que para el total de soluciones enteras positivas nosotros podemos elegir $r-1$ lugares intermedios entre los unos, que son $n-1$ disponibles, para colocar el signo de más, y esto lleva a que el total de soluciones es

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

Problema A1. Sean a, b y c números tales que $0 < a, b, c \leq 1$. Prueba que

$$\frac{1}{2+3a} + \frac{2}{2+3b} + \frac{3}{2+3c} \geq \frac{6}{5}.$$

Solución. Como $a, b, c \leq 1$, entonces $3a \leq 3$ y por lo tanto $2 + 3a \leq 2 + 3 = 5$. Como $2+3a > 0$, podemos despejar la desigualdad anterior sin modificar el signo para obtener que $\frac{1}{2+3a} \geq \frac{1}{5}$. Análogamente $\frac{1}{2+3b} \geq \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{2+3c} \geq \frac{1}{5}$. Al multiplicar la penúltima desigualdad por 2 y la última por 3, obtenemos las siguientes: $\frac{2}{2+3b} \geq \frac{2}{5}$ y $\frac{3}{2+3c} \geq \frac{3}{5}$. Por lo que finalmente tenemos

$$\frac{1}{2+3a} + \frac{2}{2+3b} + \frac{3}{2+3c} \geq \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}.$$

Problema A2. Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(x+y)(x+z) &= 30\\ (y+z)(y+x) &= 15\\ (z+x)(z+y) &= 18.\end{aligned}$$

Solución (Por César). Multiplicando las tres ecuaciones tenemos que $[(x+y)(x+z)(y+z)]^2 = 8100$. Por lo tanto $(x+y)(x+z)(y+z) = \pm 90$. Dividiendo esta ecuación entre cada una de las tres primeras tenemos las siguientes tres ecuaciones: $(y+z) = \pm 3$, $(x+z) = \pm 6$, $(x+y) = \pm 5$. Resolviendo dicho sistema obtenemos las siguientes dos soluciones $x = 4, y = 1, z = 2$ y $x = -4, y = -1, z = -2$.

Problema A3. Muestra que m^3 se puede representar como la suma de m números impares consecutivos, para todo m entero.

Solución (Por Yessica). Consideremos la suma de m impares consecutivos

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \ldots + (2n+2m-1) = m(2n) + 1 + 3 + \ldots + 2m - 1$$

Como sabemos que la suma de los primeros m impares es m^2, entonces tenemos que la suma anterior es $2mn + m^2$. Queremos encontrar n tal que se cumpla que $2mn + m^2 = m^3$. Despejando tenemos que $2mn = m^3 - m^2 = m(m^2 - m)$. Y dividiendo por m, que es distinta de 0, tenemos que $2n = m^2 - m$. Por lo tanto, dada m^3, la podemos escribir como la suma de los m impares $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\ldots+(2n+2m-1)$, con $n = \frac{m^2-m}{2}$.

Problema A4. Encuentra todos los enteros positivos n para los cuáles entre los números $n, n+1, n+2, \ldots, n^2$ existen cuatro números distintos, digamos a, b, c y d tales que $ab = cd$.

Solución. Checamos manualmente que para $n = 1$ y $n = 2$ no se cumple. Si consideramos $a = n$, $c = n+1$, $b = 2n$, $d = 2(n+1)$, se cumple que $ab = 2n(n+1) = cd$, entonces lo único que debemos encontrar son los n tales que $2(n+1) < n^2$, pues en ese caso podremos tomar dichos números. Si $2 < n$, $2n + 2 < 3n$, pero al como $3 \leq n$, entonces $3n \leq n^2$. En conclusión $2(n+1) < 3n \leq n^2$. Por lo tanto cumple para todos los $n > 2$.

Problema G1. En un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B, M es el punto medio de AC. La perpendicular a AC por M corta a BC en D y la paralela a AB por M corta a BC en E. La circunferencia que pasa por A, D y E corta de nuevo a AC en L. Muestra que $\frac{CL}{LA} = \frac{1}{3}$.

Solución (Por Patty). Tenemos que $AM = MC = MB$ por ser radios del circuncírculo del $\triangle ABC$, por lo tanto $\triangle BMC$ es isósceles y por lo tanto $\angle MBC = \angle MCB = \alpha$. El cuadrilátero $BDMA$ es cíclico porque tiene dos ángulos opuestos de $90°$, entonces $\angle DAM = \alpha$. Por Potencia del Punto C con la circunferencia circunscrita a ADE tenemos que $CE \cdot CD = CL \cdot CA$, es decir $\frac{CD}{CA} = \frac{CL}{CE}$, pero además de esta razón tenemos que $\triangle ELC$ y $\triangle ADC$ comparten un ángulo α, por lo tanto son semejantes, lo que implica que $\triangle ELC$ es isósceles con $EL = LC$. Finalmente, como $\triangle MEC$ es rectángulo, entonces L es el circuncentro, lo que implica que $ML = LC$, así $3LC = AL$.

Problema G2. Sea ABC un triángulo con AD la altura sobre BC. La circunferencia de centro D y radio AD corta a AB en P y a AC en Q. Demuestra que los triángulos ABC

y AQP son semejantes.

Solución (Por Roberto). Sean R y S la intersección de BC y AD con la circunferencia. Sea $\alpha = \angle ABD$ y $\beta = \angle BAD$. Como AS es diámetro, $\angle ASP = 90°$. Por la suma de los ángulos de $\triangle APS$ podemos concluir que $\angle PSA = \alpha$ y por abrir el mismo arco $\angle AQP = \alpha$. Veamos los triángulos ABC y AQP, $\angle PAQ = \angle CAB$ por ser el mismo, y además dichos triángulos tienen un ángulo α, entonces, son semejantes.

Problema G3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $AB = DC$ y $\angle ABD$, $\angle BDC$ son suplementarios, considera un punto E en el segmento AD tal que $DE = EB$, finalmente sea F un punto en EB tal que el ángulo que forman los segmentos FC y EB sea recto. Muestra que $AB = DF$.

Solución (Por Patty). Sea L la intersección de BE con CD. Como $BE = ED$, $\angle EBD = \angle EDB = \theta$. Sea $\angle ABD = \alpha$ y $\angle BDC = \beta$. Por hipótesis del problema tenemos que $\alpha + \beta = 180°$, pues son suplementarios. $\angle BDL = \alpha$ por ser suplementario de un β. Notemos que $\angle ABE = \alpha - \theta = \angle EDL$. Entonces, al tener además un ángulo opuesto por el vértice, $\triangle AEB$ y $\triangle LED$ son semejantes y congruentes, pues $ED = EB$, así que $AB = LD$, pero por hipótesis también $LD = LC$. Notemos que $\triangle LFC$ es rectángulo y D es punto medio de la hipotenusa, por lo tanto es el circuncentro, en particular $DF = DC$, como $DC = AB$ concluimos que $AB = DF$.

Problema G4. En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de AD, una recta perpendicular a CM por M corta a AB en K. Demuestra que $\angle DCM = \angle KCM$.

Solución (Por Daniel Ochoa). Llamemos al $\angle AKM$ como α y $\beta = \angle AMK$, entonces $\alpha + \beta = 90°$. Como $\angle CMD + \angle CMK + \beta = 180°$, entonces $\angle CMD = \alpha$ y del $\triangle CMD$, por la suma de los ángulos internos del triángulo, podemos concluir que $\angle MCD = \beta$. Notemos que como M es punto medio, por criterio LAL, al ser $AB = CD$, $AM = MD$ y tener un ángulo recto, $\triangle AMB = \triangle DMC$. Por lo tanto $\angle ABM = \beta$. Como tiene un par de ángulos opuestos rectos, $KBCM$ es cíclico y por lo tanto, $\angle KCM = \beta$, es decir, $\angle DCM = \angle KCM$.