Tarea 2 de Teoría de Números

M. en C. Jesús Rodríguez Viorato

Entregar: Lunes 27 de Septiembre de 2010

1. (1 punto)Prueba que para cualquier par de enteros a y b existen enteros q y r únicos tales que:

$$a = qb + r, \qquad \text{donde } -|b/2| < r \leq |b/2|$$

2. (1 punto)Demuestra que

   (a) 4 no divide a $n^2 + 2$.

   (b) 3 divide a $n(n+1)(n+2)$

3. (1 punto)Demuestra que el cubo de un número entero es de alguna de las formas $7k$ o $7k \pm 1$.

4. (2 punto) Pruebe que en la siguiente sucesión de números no hay cuadrados perfectos.

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

5. (2 puntos) Prueba o da un contra ejemplo a las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a^2|bc$.

   (b) Si $a|(b+c)$, entonces $a|b$ y $a|c$

   (c) Si $a|bc$, etonces $a|b$ o $a|c$.

   (d) $a|bc$ si y sólo si $\frac{a}{M.C.D(a,b)}|c$.

6. (1 punto) Usa inducción matemática para demostrar que:

$$8|5^{2n} + 7$$

7. (1 punto) Considera x e y dos números enteros tales que:

$$ax + by = (a, b).$$

Demuestra que $(x, y) = 1$.

8. (1 puntos) Para todo entero a demuestre que

$$(2a + 1, 9a + 4) = 1$$

9. (1 punto) Asumiendo que $(a, b) = 1$, demuestra lo siguiente:

$$MCD(a + b, a^2 + b^2) = 1 \text{ ó } 2$$

.

10. (1 punto) Demuestre que $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 1$