

Tarea 3 de Teoría de Números

M. en C. Jesús Rodríguez Viorato

Entrega: Miércoles, 25 de Octubre de 2010

1. Determina todas las soluciones enteras de las siguientes ecuaciones Diofantinas:

(a) $123x + 360y = 99$.
(b) $158x - 57y = 7$.
2. Si a y b son enteros positivos y primos relativos, demuestra que la ecuación Diofantina $ax - by = c$ tienen una infinidad de soluciones en los enteros **positivos**.
3. (2 puntos) Un granjero gastó \$400 000 pesos en la compra de 100 cabezas de ganado. Los toros costaron \$12,000, las vacas \$5,000 y los becerros \$2,500. El granjero compró al menos uno de cada uno, ¿cuántos animales de cada tipo compró?
4. Demuestra que el único primo de la forma $n^3 - 1$ es el 7. (Sugerencia: $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$).
5. Supongamos que $p \nmid n$ para todo primo $p \leq \sqrt[3]{n}$. Demuestra que n debe ser un primo o un producto de dos primos. (Sugerencia: Prueba la contra positiva. Es decir, empieza suponiendo que n tiene 3 factores primos)
6. Encuentra todos los primos p y q tales que $p - q = 3$.
7. (2 puntos) Prueba que si p , $p^2 + 8$ son primos, entonces $p^3 + 4$ también es primo.

8. (2 puntos) Demuestra que para todo entero $k > 0$ existen k números compuestos y consecutivos en la sucesión

$$a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$$

con $MCD(a, b) = 1$.

9. Sea p_n el n -ésimo primo. Para $n > 3$, demuestra que

$$p_n < p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$$

(Ayuda: Usa inducción y la conjetura de Bertrand)